

Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

13. Übungsblatt

Aufgabe 51:

Das Integral

$$\int_0^{0.95} \frac{dx}{1-x} = \ln 20$$

soll mit Newton–Cotes Formeln mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ approximiert werden.

- (a) Ermitteln Sie mit Hilfe der bekannten Fehlerabschätzungen für die zusammengesetzte Trapezregel und für die zusammengesetzte Simpsonregel die Anzahl der Unterteilungen N , so daß der Fehler kleiner als ε wird.

Hinweis zur Bezeichnung: Trapezregel: $N = \frac{b-a}{h}$, Simpsonregel: $N = \frac{b-a}{H}$, $H = 2h$.

- (b) Bestimmen Sie (eventuell mit eigenen MATLAB-Programmen) ab welcher Anzahl von Unterteilungen die Trapez- bzw. die Simpson-Regel den vorgegebenen Fehler unterschreiten. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Zahlen aus a).

Aufgabe 52:

Zeigen Sie, daß für den Fehler

$$R(f) := \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) - \int_a^b f(x) dx$$

der numerischen Integration folgender Sachverhalt gilt (Satz von Peano):

Für alle Polynome $p(x)$ vom Grad $\leq n$ sei $R(p) = 0$. Dann gilt für alle Funktionen $f \in C^{n+1}[a, b]$ die Fehlerdarstellung

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt$$

mit

$$K(t) := \frac{1}{n!} R[(x-t)_+^n] \quad (\text{Peano-Kern}), \quad (x-t)_+^n := \begin{cases} (x-t)^n & \text{für } x \geq t \\ 0 & \text{für } x < t \end{cases}.$$

Aufgabe 53:

Nutzen Sie den Satz von Peano zusammen mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, um die aus der Vorlesung bekannte Fehlerabschätzung für die Trapez-Formel zu zeigen.