**TU Chemnitz**
**Professur Numerische Mathematik**
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

5. Februar 2014

# Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

12. Übungsblatt

## Aufgabe 47:

(a) Sei $V$ ein normierter Vektorraum sowie $U$ ein endlichdimensionaler Unterraum von $V$. Man zeige: Zu jedem $v \in V$ existiert eine *Bestapproximation* aus $U$, d.h. ein $u_* \in U$ mit der Eigenschaft

$$\|v - u_*\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U.$$

(b) Man zeige: Die Abbildung $I_n : C[a,b] \to \mathscr{P}_n$, welche einer stetigen Funktion $f$ ihr Interpolationspolynom $I_n f$ vom Grad $n$ bezüglich einer gegebenen Knotenmenge (paarweise verschiedener Knoten) zuordnet, ist eine Projektion. Die Norm

$$\Lambda_n := \sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \not\equiv 0}} \frac{\|I_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

dieser Abbildung wird *Lebesgue-Konstante* gennant. Man zeige:

$$\Lambda_n = \Big\| \sum_{j=0}^{n} |\ell_j| \Big\|_\infty.$$

(c) Mit $E_n(f)$ sei der Fehler Bestapproximation an die Funktion $f \in C[a,b]$ aus dem Raum $\mathscr{P}_n$ der Polynome vom Grad höchstens $n$ (bezüglich der Maximumnorm) bezeichnet. Zeigen Sie: für den Interpolationsfehler gilt

$$E_n(f) \leq \|f - I_n f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)\, E_n(f).$$

## Aufgabe 48:

(a) Es sei $f(x) \in C^4(a,b)$, und $s(x)$ sei eine kubische Spline–Funktion bezüglich der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Beweisen Sie, dass

$$|f(x) - s(x)|_2^2 = \int_a^b \big[f(x) - s(x)\big]\, f^{(iv)}(x)\, dx$$

gilt, falls zusätzlich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $f'(x) = s'(x)$ für $x = a, b$,

(ii) $f''(x) = s''(x)$ für $x = a, b$,

(iii) $s(x)$ und $f(x)$ sind periodisch.

(b) Zeigen Sie: Ist $\bar{\mathscr{T}}$ eine Verfeinerung der Zerlegung $\mathscr{T}$ des Intervalls $[a, b]$, d.h. $\bar{\mathscr{T}} \subset \mathscr{T}$, und bezeichnen $s$ bzw. $\bar{s}$ die zu diesen Zerlegungen gehörenden kubischen Splinefunktionen, welche die Funktion $f$ interpolieren, so gilt

$$|f|_2 \geq |\bar{s}|_2 \geq |s|_2 \,.$$

*Bemerkung:* Mit $|f(x)|_2$ wird die Halbnorm $|f(x)|_2^2 = \|f''(x)\|_0^2 = \int_a^b f(x)^2 dx$ bezeichnet.

## Aufgabe 49:

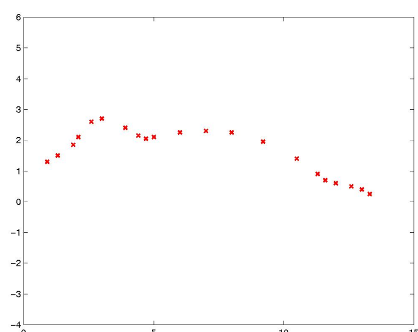
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bestimmen Sie alle Toeplitz-Matrizen $T^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\|A - T^*\|_F = \min\{\|A - T\|_F : T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ist Toeplitz-Matrix}\}.$$

## Aufgabe 50:

(a) Schreiben Sie MATLAB-Programme, mit denen man interpolierende lineare und kubische Splines (mindestens den Fall des natürlichen Splines) berechen und ploten kann.

(b) Die folgenden Daten $x_i,\ y_i,\ i = 0, \ldots, 20$ erhielt man, indem man die Silhouette einer fliegenden Ente in ein Koordinatensystem übertrug und auf dem oberen Rand (vom Schnabel über den Kopf bis zu den Schwanzfedern) 21 Punkte auswählte.




Interpolieren Sie die Daten sowohl mit einem vollständigen Polynom (vom Grad 20) als auch mit natürlichen kubischen Splines. Zeichnen Sie die beiden Interpolierenden.

$$\begin{aligned} x &= \{x_i\}_{i=0}^{20} = (0.9,\ 1.3,\ 1.9,\ 2.1,\ 2.6,\ 3.0,\ 3.9,\ 4.4,\ 4.7,\ 5.0, \\ &\qquad 6.0,\ 7.0,\ 8.0,\ 9.2,\ 10.5,\ 11.3,\ 11.6,\ 12.0,\ 12.6,\ 13.0,\ 13.3) \\ y &= \{y_i\}_{i=0}^{20} = (1.3,\ 1.5,\ 1.85,\ 2.1,\ 2.6,\ 2.7,\ 2.4,\ 2.15,\ 2.05,\ 2.1, \\ &\qquad 2.25,\ 2.3,\ 2.25,\ 1.95,\ 1.4,\ 0.9,\ 0.7,\ 0.6,\ 0.5,\ 0.4,\ 0.25) \end{aligned}$$