

## Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

### 11. Übungsblatt

#### Aufgabe 43:

Die Tschebyscheff-Polynome (erster Art) sind definiert durch

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Man zeige:

- a)  $T_n$  ist ein Polynom vom exakten Grad  $n$  und hat für  $n \geq 1$  den Höchstkoeffizienten  $2^{n-1}$ .  
**Hinweis:** Finden Sie eine Rekursionsformel, die die Tschebyscheff-Polynome erfüllen.

- b) Die Tschebyscheff-Polynome genügen der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

für alle  $x \in [-1, 1]$ .

- c) Die Tschebyscheff-Polynome erfüllen die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

- d) Es sei  $f \in C^\infty([-1, 1])$  und es gelte  $\max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| = o(2^n n!)$  (d.h.  $[\max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)|] / [2^n n!]$  strebt gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ ).  $p_n$  bezeichne dasjenige Polynom vom Grad  $n$ , das  $f$  an den Nullstellen von  $T_{n+1}$  interpoliert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_n(x)| \right] = 0.$$

**Hinweis:** Für diese Aufgabe ist die Bestimmung der Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms nicht notwendig.

- e) Finden Sie eine Formel für die Nullstellen eines Tschebyscheff-Polynoms.

#### Aufgabe 44:

Seien  $x_0, \dots, x_n$  paarweise verschieden sowie

$$x_{\min} := \min\{x_0, \dots, x_n\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \dots, x_n\}.$$

Dann gilt für  $f \in C^n[x_{\min}, x_{\max}]$  die Integraldarstellung

$$f[x_0, \dots, x_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n[x_n - x_{n-1}] + \dots + t_1[x_1 - x_0] + x_0) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1.$$

**Hinweis:** Induktion nach  $n \geq 1$ : substituieren Sie im Induktionsanfang  $\xi = t_1[x_1 - x_0] + x_0$  und, im Induktionsschritt, im innersten Integral  $\xi = t_n[x_n - x_{n-1}] + \dots + t_1[x_1 - x_0] + x_0$ .

In obiger Integraldarstellung ist der Integrand eine stetige Funktion von  $x_0, \dots, x_n$ , und damit auch  $f[x_0, \dots, x_n]$ . Insbesondere lassen sich die dividierten Differenzen damit auch für nicht paarweise verschiedene Argumente fortsetzen. Wenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung an und folgern Sie die Existenz von  $\xi \in [x_{\min}, x_{\max}]$  mit

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Insbesondere führt, falls  $f^{(n)}$  stetig in einer Umgebung von  $x$ , die Festsetzung

$$f[\underbrace{x, x, \dots, x}_{n+1 \text{ Argumente}}] := \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

zu einer stetigen Fortsetzung der dividierten Differenz  $n$ -ter Ordnung auf den Fall, dass alle Argumente zusammenfallen.

#### Aufgabe 45:

Es seien  $\mathcal{T} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$   $n+1$  paarweise verschiedene Knoten  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $x_i < x_{i+1}$ .  $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}^k$  bezeichnet den Raum der Splines der Ordnung  $k$  bzgl.  $\mathcal{T}$ , d.h.

$$\begin{aligned} s(t) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}^k &\implies s(t) \in C^{k-1}[a, b] \\ s(t)|_{[x_{i-1}, x_i]} &= s_i(t) \in \mathcal{P}_k \end{aligned}$$

Die Funktion  $(x - x_i)_+^k \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}^k$  wird durch

$$(x - x_i)_+^k = \begin{cases} (x - x_i)^k & x \geq x_i \\ 0 & x < x_i \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, daß gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{T}}^k &= \text{span}\{1, x, \dots, x^k, (x - x_1)_+^k, \dots, (x - x_{n-1})_+^k\} \\ \implies \dim \mathcal{S}_{\mathcal{T}}^k &= n + k. \end{aligned}$$

#### Aufgabe 46:

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas ein Interpolationspolynom vom Grad  $n$  (gegeben durch die Stützstellen und die Werte an den Stützstellen) in einer Stelle  $x$  auswertet.

Schreiben Sie weiterhin ein MATLAB-Programm, mit deren Hilfe man die dividierten Differenzen berechnen kann. Schreiben Sie ein weiteres MATLAB-Programm mit dem man mit Hilfe der dividierten Differenzen das Interpolationspolynom an einer Stelle  $x$  auswerten kann.