TU Chemnitz
Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

5. Februar 2014

Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie für die Werte $c_1, \dots, c_5$ aus der Vorlesung und für $c_i = 1, i = 1, \dots, 5$, sowie $p = 11$ jeweils die Gleichgewichtszustände $U_\infty, V_\infty, W_\infty$.

(b) Geben Sie einen Satz von Steuerungsparametern $c_1, \dots, c_5$ und p an, so das $U_\infty = 4$, $V_\infty = 16$ und $W_\infty = 64$ gilt.

(c) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die Gleichgewichtsmaschine aus Kapitel 1.1 der Vorlesung simuliert. Der Input dieser Funktion soll aus den Parametern U_0, V_0, W_0, R_0, p, c_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) und $t_{\text{end}} \in \mathbb{N}$ bestehen. Die Werte von U_n, V_n, W_n, R_n ($n = 0, 1, \dots, t_{\text{end}}$) sollen (möglichst graphisch) ausgegeben werden.

(d) Wenn man ausgehend von $U_0 = V_0 = W_0 = 0$ und $R_0 = 100$ dieses Simulationsprogramm mit den Parametern $p = 11$ sowie $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 1$ ausführt, erhält man nach fünfzig Zeitschritten ($t_{\text{end}} = 50$) $R_{50} = -2.85$ (oder einen ähnlich unsinnigen Wert)! Warum? Wie muss man das Programm modifizieren, damit solche “Fehler” nicht mehr auftreten?

Aufgabe 2:

(a) Machen Sie sich durch eine Skizze klar, dass das Newton-Verfahren angewandt auf $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$, für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$ strebt. Beweisen Sie: Dabei gilt stets (falls $x_0 \neq \sqrt{a}$)

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > \sqrt{a},$$

d.h. die Näherungsfolge ist (ab x_1) streng monoton fallend.

(b) Verifizieren Sie, dass für das Newton-Verfahren angewandt auf $f(x) = x^2 - a$ mit $a = 2$ die Fehlerformel

$$|\sqrt{2} - x_{m+1}| \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}\,|\sqrt{2} - x_m|^2$$

gilt. Mit wievielen korrekten Ziffern kann man in x_{m+1} rechnen, wenn x_m sechs korrekte Ziffern besitzt?

(c) Versuchen Sie, die Fehlerformel aus b) theoretisch zu untermauern (Hinweis: Taylor-Formel).

Aufgabe 3:

(a) Das Newton-Verfahren ist nicht immer erfolgreich. Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens für die Funktion $f(x) = xe^{-x}$ und machen Sie sich an einer Skizze klar, dass die Newton-Folge mit dem Startwert $x_0 = 2$ divergiert. Was passiert, wenn man den Startwert x_0 aus dem offenen Intervall $(0, 1)$ wählt?

(b) Konstruieren Sie eine Funktion f, so dass für die Newton-Folge $x_{2m} = 0$ (mit $f(x_{2m}) = -1$) und $x_{2m+1} = 1$ (mit $f(x_{2m+1}) = 1$) für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt (*Newton-Käfig*).

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass das Anfangsrandwertproblem aus Kapitel 1.3 der Vorlesung die Lösung

$$u(x,t) = 3e^{-t}\sin(x) - e^{-4t}\sin(2x) + e^{-9t}\sin(3x)$$

besitzt.

Aufgabe 5:

Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung die folgenden Aussagen:

(a) Ist f in $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + Ch^2$$

mit $|C| \leq \frac{1}{6}\max_{x\in I}|f'''(x)|$.

(b) Ist f in I viermal stetig differenzierbar, so gilt

$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0) + Ch^2$$

mit $|C| \leq \frac{1}{12}\max_{x\in I}|f^{(4)}(x)|$.

(Natürlich wird hier immer vorausgesetzt, dass die auftretenden Argumente von f im Intervall I enthalten sind.)