TU Chemnitz 5. Februar 2014
Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

Musterlösungen zu nicht behandelten Aufgaben

Aufgabe 45:

Es seien $\mathscr{T} = \{a = x_0,\, x_1, \dots, x_n = b\}$ $n{+}1$ paarweise verschiedene Knoten $x_i \in \mathbb{R},\ x_i < x_{i+1}$. $\mathscr{S}^k_{\mathscr{T}}$ bezeichnet den Raum der Splines der Ordnung k bzgl. $\mathscr{T}$, d.h.

$$\begin{aligned} s(t) \in \mathscr{S}^k_{\mathscr{T}} \quad \Longrightarrow \quad & s(t) \in C^{k-1}[a,b] \\ & s(t)|_{[x_{i-1},x_i]} = s_i(t) \in \mathscr{P}_k \end{aligned}$$

Die Funktion $(x - x_i)^k_+ \in \mathscr{S}^k_{\mathscr{T}}$ wird durch

$$(x - x_i)^k_+ = \begin{cases} (x - x_i)^k & x \geq x_i \\ 0 & x < x_i \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, daß gilt

$$\begin{aligned} & \mathscr{S}^k_{\mathscr{T}} = \text{span}\{1, x, \dots, x^k, (x-x_1)^k_+, \dots, (x - x_{n-1})^k_+\} \\ & \Rightarrow \dim \mathscr{S}^k_{\mathscr{T}} = n + k\ . \end{aligned}$$

Lösung:

(i) $\{1, x, \dots, x^k, (x-x_1)^k_+, \dots, (x - x_{n-1})^k_+\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathscr{S}^k_{\mathscr{T}}$. Mit Hilfe der ertsen Funktionen $1, x, \dots, x^k$ kann man jedes Polynom k-ten Grades auf dem ersten Intervall beschreiben, also auch ein Polynom, welches die ersten beiden Interpolationsbedingungen erfüllt. Da diese Funktionen global definiert sind sind sie auch beliebig oft stetig diffbar. Die nächste Funktion $(x - x_1)^k_+$ ist in x_1 Null und $(k-1)$ mal stetig differenzierbar und stückweise ein Polynom vom Grad k. Sie ist also eine Splinefunktion. Mit Ihrer Hilfe kann man die dritte Interpolationsbedingung erfüllen, ohne die beiden vorherigen zu verändern. Nach diesem Schema kann man die weiteren Funktionen nutzen um die weiteren Interpolationsbedingungen zu erfüllen. Das heißt also, dass man mit dieser Menge von Funktionen jede Splinefunktione durch eine Linearkombination bilden kann. Damit ist dies Menge ein Erzeugendensystem des Raumes aller Splinefunktionen der Ordnung k bzgl. einer Zerlegung $\mathscr{T}$. Damit ist also die Dimension des Spline-Raumes durch $n + k$ nach oben begrenzt.

(ii) Lineare Unabhängigkeit der Funktionen $1, t, \dots, t^k, (t-t_1)_+^k, \dots, (t-t_{n-1})_+^k$

$$s(t) = \sum_{j=0}^{k} a_j t^j + \sum_{j=1}^{n-1} c_j (t-t_j)_+^k = 0 \quad t \in [a,b]$$

Wir betrachten die linearen Funktionale

$$G_i(s) := \frac{1}{(k)!}\big(s^{(k)}(t_i^+) - s^{(k)}(t_i^-)\big), \quad i = 1, \dots, l$$

(Bem.: rechts- bzw. linksseitige k–te Ableitung in t_i)

$$0 = G_i(s) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j G_i(t^j) + \sum_{j=1}^{l} c_j G_i([t-t_j]_+^{k-1}) = c_i$$

da $G_i(t^j) = 0$ und $G_i([t-t_j]_+^k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

$$\Rightarrow \quad c_i = 0 \quad i = 1, \dots, l$$

$$\Rightarrow \quad 0 = s(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j \quad \Rightarrow \quad a_j = 0 \quad j = 0, \dots, k-1\,.$$

$\Rightarrow$ Behauptung. Damit ist das Erzeugendensystem linear unabhängig, also eine Basis und damit ist die Dimension von $\mathscr{S}_{\mathscr{T}}^k$ mit $n+k$ festgelegt.

Aufgabe 47:

(a) Sei V ein normierter Vektorraum sowie U ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Man zeige: Zu jedem $v \in V$ existiert eine *Bestapproximation* aus U, d.h. ein $u_* \in U$ mit der Eigenschaft

$$\|v - u_*\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U.$$

(b) Man zeige: Die Abbildung $I_n : C[a,b] \to \mathscr{P}_n$, welche einer stetigen Funktion f ihr Interpolationspolynom $I_n f$ vom Grad n bezüglich einer gegebenen Knotenmenge (paarweise verschiedener Knoten) zuordnet, ist eine Projektion. Die Norm

$$\Lambda_n := \sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \not\equiv 0}} \frac{\|I_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

dieser Abbildung wird *Lebesgue-Konstante* gennant. Man zeige:

$$\Lambda_n = \Big\| \sum_{j=0}^{n} |\ell_j| \Big\|_\infty.$$

(c) Mit $E_n(f)$ sei der Fehler Bestapproximation an die Funktion $f \in C[a,b]$ aus dem Raum $\mathscr{P}_n$ der Polynome vom Grad höchstens n (bezüglich der Maximumnorm) bezeichnet. Zeigen Sie: für den Interpolationsfehler gilt

$$E_n(f) \leq \|f - I_n f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)\, E_n(f).$$

Lösung:

(a) Wir definieren uns die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(u) = \|v - u\|$. Dann gilt, mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|g(u) - g(w)| = |\|v - u\| - \|v - w\|| \leq \|(v - u) - (v - w)\| \leq \|u - w\|$$

Damit ist g also eine stetige Funktion auf U und damit auch jedem Unterraum von U. Betrachten wir den Unterraum

$$B = \{u \in U : \|u\| \leq 2\|v\|\} \subset U.$$

Dann gilt für jedes Element $f \notin B$, also $\|f\| > 2\|v\|$:

$$g(f) = \|v - f\| \geq |\|v\| - \|f\|| = \|f\| - \|v\| > 2\|v\| - \|v\| = \|v\| = g(0)$$

Da offensichtlich $0 \in B$ gilt. Ist also das gesuchte Element u_* in der Menge B zu suchen. Damit suchen wir also ein minimales Element u_* in der Menge B. Da aber B nach Definition abgeschlossen und beschränkt ist, und da B als Unterraum eines endlichdimensionalen Raumes wieder endlichdimensional ist, ist B kompakt. Da $g(u) \geq 0$ ist gilt auch

$$\inf_{u \in U} g(u) = \inf_{u \in B} \geq 0$$

Wegen der Kompaktheit von B wird dieses Infimum auch in einem Element u_* angenommen und damit gilt für dieses Element

$$g(u_*) \leq g(u) \quad \forall u \in U$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Lambda_n &= \sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \not\equiv 0}} \frac{\|I_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} \\
&= \sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \not\equiv 0}} \frac{\max |\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)|}{\max |f(x)|} \\
&\leq \sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \not\equiv 0}} \frac{\max \sum_{i=0}^n |f(x_i)||l_i(x)|}{\max |f(x)|} \\
&\leq \sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \not\equiv 0}} \frac{\max |f(x)| \max \sum_{i=0}^n |l_i(x)|}{\max |f(x)|} \\
&= \sup_{\substack{f \in C[a,b] \\ f \not\equiv 0}} \max \sum_{i=0}^n |l_i(x)| \\
&= \max \sum_{i=0}^n |l_i(x)| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^n |l_i| \right\|_\infty
\end{aligned}$$

Es gilt also für alle Funktionen f:

$$\|I_n f\| \leq \Lambda_n \|f\|$$

(c) Sei $f_* \mathscr{P}_n$ die Bestapproximation an f aus dem Raum der Polynome vom Grad n, also $E_n(f) = \|f - f*\|_\infty$ und $E_n(f) \leq \|f - p\|$ für alle Polynome $p \in \mathscr{P}_n$, also auch für das Interpolationspolynom $I_n f$. Damit ist also der erste Teil der Ungleichung gezeigt.

Für den zweiten Teil der Ungleichung benötigt man nur die Eigenschaft, dass I_n eine Projektion ist, dass also $I_n p = p$ für alle Polynome $p \in \mathscr{P}_n$.

$$\begin{aligned}\|f - I_n f\|_\infty &= \|f - (f_* - \underbrace{f_*}_{=I_n f_*}) - I_n f\|_\infty = \|(f - f_*) + I_n(f - f_*)\|_\infty \\ &\leq \underbrace{\|f - f*\|_\infty}_{=E_n(f)} + \underbrace{\|I_n(f - f_*)\|_\infty}_{\leq \Lambda_n \|f - f_*\|_\infty} \leq (1 + \Lambda_n) E_n\end{aligned}$$

Aufgabe 48:

(a) Es sei $f(x) \in C^4(a,b)$, und $s(x)$ sei eine kubische Spline–Funktion bezüglich der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Beweisen Sie, dass

$$|f(x) - s(x)|_2^2 = \int_a^b \big[f(x) - s(x)\big] f^{(iv)}(x)\, dx$$

gilt, falls zusätzlich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $f'(x) = s'(x)$ für $x = a, b$,

(ii) $f''(x) = s''(x)$ für $x = a, b$,

(iii) $s(x)$ und $f(x)$ sind periodisch.

(b) Zeigen Sie: Ist $\bar{\mathscr{T}}$ eine Verfeinerung der Zerlegung $\mathscr{T}$ des Intervalls $[a,b]$, d.h. $\bar{\mathscr{T}} \subset \mathscr{T}$, und bezeichnen s bzw. $\bar{s}$ die zu diesen Zerlegungen gehörenden kubischen Splinefunktionen, welche die Funktion f interpolieren, so gilt

$$|f|_2 \geq |\bar{s}|_2 \geq |s|_2 \,.$$

Bemerkung: Mit $|f(x)|_2$ wird die Halbnorm $|f(x)|_2^2 = \|f''(x)\|_0^2 = \int_a^b f(x)^2 dx$ bezeichnet.

Lösung:

(a) Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}|f - s|_2^2 &= \int_a^b (f'' - s'')^s dx = \int_a^b (f'' - s'')(f'' - s'') dx \\ &= \Big[(f' - s')(f'' - s'') - (f - s)(f''' - s''')\Big] \Big|_a^b + \int_a^b (f - s)(f^{(iv)} - s^{(iv)})\, dx\end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden, falls eine der drei Zusatzbedingungen erfüllt ist und weil $f(a) = s(a)$ und $f(b) = s(b)$. Ferner ist $s^{(iv)}(x) \equiv 0$ als stückweises Polynom dritten Grades.

(b) Dies folgt aus der Extremaleigenschaft (Minimierungseigenschaft) kubischer Splines (siehe Vorlesung) und aus $f(x_i) = \bar{s}(x_i) = s(x_i)$ für alle Knoten $x_i \in \mathscr{T}$, d.h. es gilt

$$|\bar{s}|_2 \geq |s|_2 \,.$$

Da $\bar{s}$ bezüglich $\bar{\mathscr{T}}$ ein kubischer Interpolationsspline für f ist, folgt

$$|f|_2 \geq |\bar{s}|_2 \,.$$

Aufgabe 49:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie alle Toeplitz-Matrizen $T^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\|A - T^*\|_F = \min\{\|A - T\|_F : T \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ist Toeplitz-Matrix}\}.$$

Lösung:

Toeplitzmatrix

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & & & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & & t_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_{1-n} & & & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

$$\|A - T\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - t_{ij}|^2 \qquad \Rightarrow \quad \text{Approximationsproblem für jede Diagonale, d.h.}$$

$$\sum_{j-i=k} |a_{ij} - t_k|^2 \to \min \qquad (\ \|a_{(ij)} - t\|_2^2 \longrightarrow \min \qquad \text{für } t \in \text{span}\{(1,\dots,1)\}\ )$$

Für festes k: Problem der Bestapproximation eines Vektors $\{a_{ij}\}_{j-i=k}$ auf span$\{(1,\dots,1)\} = \{v = (t_k,\dots,t_k)\}$

$$\text{d.h.} \quad \{a_{ij} - t_k\} \perp (d,\dots,d)^T \text{ bzgl. } (.,.)$$

$$\text{d.h.} \quad \sum_{j-i=k} (a_{ij} - t_k)d = 0 \quad \forall\, d \quad (\text{Vektorlänge: } n - |k|\,)$$

$$\text{d.h.} \quad 0 = d \cdot \sum_{j-i=k} (a_{ij} - t_k) = d \cdot \Big\{ \sum_{j-i=k} a_{ij} - \sum_{j-i=k} t_k \Big\} = d \cdot \Big\{ \sum_{j-i=k} a_{ij} - (n - |k|)t_k \Big\}$$

$$\iff \quad \{\ \dots\ \} = 0$$

$$\iff \quad t_k = \frac{\sum_{j-i=k} a_{ij}}{n - |k|}$$

Die Bestapproximation aus dem Raum der Toeplitz-Matrizen erhält man also, wenn man jede Diagonale durch Ihren Mittelwert ersetzt.