

## B Exkurs über Vektor- und Matrixnormen

Um die Länge von Vektoren aus einem Vektorraum  $\mathcal{V}$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  (und damit den Abstand zweier Vektoren) zu messen, definieren wir **Normen**, das sind Abbildungen

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad v \mapsto \|v\|, \quad \text{die}$$

- **positiv definit**, d.h.  $\|v\| > 0 \forall v \in \mathcal{V}, v \neq 0$ , sowie
- **homogen**, d.h.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in \mathcal{V}$ , sind und der
- **Dreiecksungleichung**, d.h.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \forall v, w \in \mathcal{V}$ , genügen.

Der **Abstand** zweier Vektoren  $v, w \in \mathcal{V}$  (bez. der Norm  $\|\cdot\|$ ) ist durch  $d(v, w) := \|v - w\|$  definiert ( $d$  ist eine **Metrik** auf  $\mathcal{V}$ ).

Die wichtigsten Normen im  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ ) sind die **Hölder-Normen**,

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p \leq \infty,$$

mit den Spezialfällen

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j| \quad ((\text{Betrags-})\text{Summennorm}),$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Euklid-Norm}),$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad (\text{Maximumnorm})$$

( $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$ ).

**Beachte:**  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ .

Obwohl alle Normen im  $\mathbb{K}^n$  äquivalent sind, z.B. gilt für alle  $x \in \mathbb{K}^n$

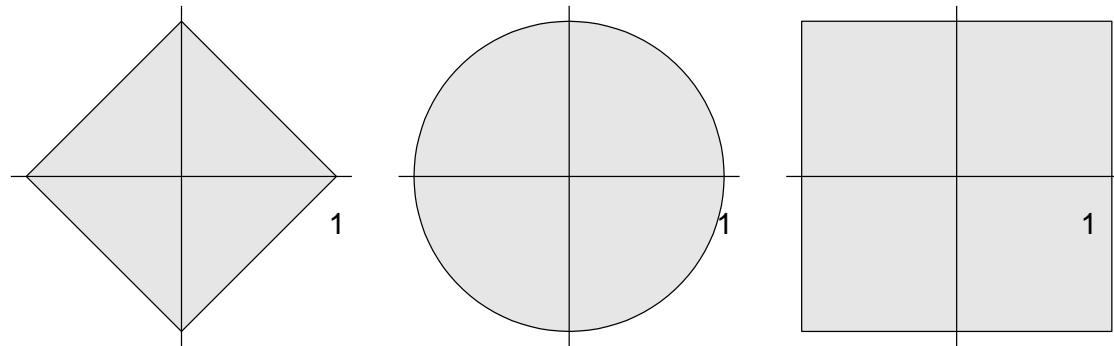
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \quad \text{sowie}$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

d.h. sie erzeugen dieselbe Topologie (Grenzwerte, Stetigkeit), gibt es deutliche Unterschiede:

Einheitskreisscheibe  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  bez.  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  und  $\|\cdot\|_\infty$ :



Eine **Matrixnorm** ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad A \mapsto \|A\|, \quad \text{die}$$

- **positiv definit**, d.h.  $\|A\| > 0 \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}, A \neq O$ , sowie
- **homogen**, d.h.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , ist und der
- **Dreiecksungleichung**, d.h.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , genügt. Zusätzlich soll sie
- **submultiplikativ** sein, d.h.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .

Beispiel: **Frobenius** oder **Schur-Norm** ( $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ )

$$\|A\|_F := \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} = [\text{spur}(A^H A)]^{1/2}.$$

Jede Vektornorm  $\|\cdot\|_V$  im  $\mathbb{K}^n$  induziert durch

$$\|A\|_M := \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}$$

eine Matrixnorm in  $\mathbb{K}^{n \times n}$ , die von  $\|\cdot\|_V$  **induzierte Matrixnorm**.

Es ist üblich, für  $\|\cdot\|_V$  und  $\|\cdot\|_M$  das gleiche Symbol zu verwenden:

$\|\cdot\|_1$  induziert die **Spaltensummennorm**  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$ .

$\|\cdot\|_2$  induziert die **Spektralnrm**  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$ .

$\|\cdot\|_\infty$  induziert die **Zeilensummennorm**  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ .

Eine Vektornorm  $\|\cdot\|_V$  und eine Matrixnorm  $\|\cdot\|_M$  sind miteinander **verträglich** (oder passen zueinander), wenn

$$\|A\mathbf{x}\|_V \leq \|A\|_M \|\mathbf{x}\|_V \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n, A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

gilt.

Bezeichnet  $\|\cdot\|_M$  die von der Vektornorm  $\|\cdot\|_V$  induzierte Matrixnorm, so sind  $\|\cdot\|_V$  und  $\|\cdot\|_M$  miteinander verträglich.  $\|\cdot\|_M$  ist die kleinste Matrixnorm, die mit  $\|\cdot\|_V$  verträglich ist: Für alle  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt

$$\|A\|_M = \min\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ ist mit } \|\cdot\|_V \text{ verträglich}\}.$$

Die Euklidische Vektornorm  $\|\cdot\|_2$  ist mit der Frobenius-Norm  $\|\cdot\|_F$  verträglich, was  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  impliziert.

## Einige Fakten:

1. Für jede Norm  $\| \cdot \|$  auf  $\mathcal{V}$  gilt

$$\|v - w\| \geq | \|v\| - \|w\| | \quad \forall v, w \in \mathcal{V}.$$

2. Für alle  $1 \leq p, q, \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $\frac{1}{\infty} := 0$ ) gilt

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n \quad (\text{Hölder-Ungleichung}).$$

Wichtiger Spezialfall:

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung}).$$

- 3.** Ist  $(\cdot, \cdot)$  ein Innenprodukt auf  $\mathcal{V}$ , so ist  $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$  eine Norm auf  $\mathcal{V}$  (die von  $(\cdot, \cdot)$  induzierte Norm).

Die Euklid-Vektornorm wird durch das Euklidsche-Innenprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n,$$

die Frobenius-Norm durch das Innenprodukt

$$(A, B) := \text{spur}(B^H A), \quad A, B \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

induziert.

- 4.** Wird eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathcal{V}$  durch ein Innenprodukt induziert, so genügt sie der **Parallelogrammgleichung**,

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \forall v, w \in \mathcal{V}.$$

Genügt umgekehrt eine Norm der Parallelogrammgleichung, so wird sie durch ein Innenprodukt induziert.

**5.** Für jede Matrixnorm  $\|\cdot\|$  gelten:

$$\|I\| \geq 1 \text{ und } \|A^{-1}\| \geq 1/\|A\|.$$

Wird  $\|\cdot\|$  von einer Vektornorm induziert, so ist  $\|I\| = 1$ .

**6.** Ist  $\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\}$  der **Spektralradius** von  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $\|\cdot\|$  eine Matrixnorm, so ist  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

Für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es eine (von einer Vektornorm induzierte) Matrixnorm  $\|\cdot\|$  (die von  $A$  und  $\varepsilon$  abhängt) mit

$$\|A\| - \varepsilon \leq \rho(A) \leq \|A\|.$$

Ist  $A$  diagonalisierbar, so gibt es eine Matrixnorm  $\|\cdot\|$  mit  $\|A\| = \rho(A)$ .

**7.** Für jede Matrixnorm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$  gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{1/m} = \rho(A) \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{C}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^{n \times n}$  heißt **absolut**, wenn

$$\| |\mathbf{x}| \| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad \text{bzw.} \quad \| |A| \| = \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

gilt. Für  $\mathbf{x} = [x_j]_{1 \leq j \leq n}$  und  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$  sind dabei  $|\mathbf{x}| := [|x_j|]_{1 \leq j \leq n}$  und  $|A| = [|a_{i,j}|]_{1 \leq i,j \leq n}$ .

$\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_F$  sind absolute Matrixnormen, während  $\|\cdot\|_2$  nicht absolut ist.

**Bemerkung.** Eine Norm auf  $\mathbb{C}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ist genau dann absolut, wenn

$$|\mathbf{x}| \leq |\mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n) \quad \text{stets} \quad \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y}\| \quad \text{bzw.}$$

$$|A| \leq |B| \quad (A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}) \quad \text{stets} \quad \|A\| \leq \|B\| \quad \text{impliziert.}$$

Dabei ist  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} :\Leftrightarrow x_j \leq y_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  bzw.  $A \leq B :\Leftrightarrow a_{i,j} \leq b_{i,j}$   
 $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ .