

# A Grundlagen aus der linearen Algebra

1. Räume
2. Koordinaten
3. Basistransformationen
4. Matrixdarstellungen linearer Abbildungen
5. Jordansche Normalform

## A.1 Räume.

Sind  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  Unterräume eines Vektorraums  $\mathcal{V}$  (über dem Körper  $\mathbb{K}$ ), so sind

$$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \quad \text{sowie} \quad \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$$

ebenfalls Unterräume von  $\mathcal{V}$ .

Sind  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  endlich-dimensional, so gilt

$$\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) = \dim(\mathcal{U}_1) + \dim(\mathcal{U}_2) - \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2).$$

Ist  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  (also ein **Vektorraum-Homomorphismus**), dann ist

$$\mathcal{N}(\varphi) := \{v \in \mathcal{V} : \varphi(v) = \mathbf{0}\} \quad \text{Unterraum von } \mathcal{V},$$

$$\mathcal{R}(\varphi) := \{w \in \mathcal{W} : \exists v \in \mathcal{V} \text{ mit } \varphi(v) = w\} \quad \text{Unterraum von } \mathcal{W}.$$

$\mathcal{N}(\varphi)$  heißt **Kern** oder **Nullraum** von  $\varphi$ .

$\mathcal{R}(\varphi)$  heißt **Bild** von  $\varphi$ .

$\text{def}(\varphi) := \dim(\mathcal{N}(\varphi))$  ist der **Defekt** von  $\varphi$ .

$\text{rank}(\varphi) := \dim(\mathcal{R}(\varphi))$  ist der **Rang** von  $\varphi$ .

Ist  $\mathcal{V}$  endlich-dimensional, so gilt

$$\dim(\mathcal{V}) = \text{def}(\varphi) + \text{rank}(\varphi).$$

Ist  $\mathcal{V}$  ein Vektorraum mit Unterräumen  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ , dann nennt man  $\mathcal{V}$  die **direkte Summe** von  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$ , wenn

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

gelten, und schreibt  $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ .

Für jedes  $v \in \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$  gibt es eindeutig bestimmte Vektoren  $u_1 = u_1(v) \in \mathcal{U}_1$  und  $u_2 = u_2(v) \in \mathcal{U}_2$  mit  $v = u_1 + u_2$ .

Die Abbildung

$$\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad v \mapsto u_1(v),$$

ist linear und idempotent ( $\pi \circ \pi = \pi$ ) mit  $\mathcal{R}(\pi) = \mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{N}(\pi) = \mathcal{U}_2$ .  
 $\pi$  heißt **Projektion** auf  $\mathcal{U}_1$  entlang  $\mathcal{U}_2$ .

## A.2 Koordinaten

Sei  $\mathcal{V}$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$  und sei  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ .

Jeder Vektor  $v \in \mathcal{V}$  läßt sich als Linearkombination in der Basis  $V$  darstellen:

$$v = \sum_{j=1}^n \nu_j v_j, \quad \text{mit } \nu_j \in \mathbb{K}.$$

Die **Koordinaten**  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  sind durch  $v$  eindeutig bestimmt.

Der **Koordinatenvektor** von  $v$  bez. der Basis  $V$  ist gegeben durch

$$[v]^V := [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n]^T \in \mathbb{K}^n.$$

Formal:

$$v = V[v]^V \quad (\text{interpretiere } V \text{ als Zeilenvektor aus } \mathcal{V}^n).$$

Die Abbildung

$$[\cdot]^V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad v \mapsto [v]^V$$

ist ein **Vektorraum-Isomorphismus**, d.h.

- sie ist bijektiv,

und es gelten

- $[v + w]^V = [v]^V + [w]^V$  für alle  $v, w \in \mathcal{V}$ ,
- $[\alpha v]^V = \alpha [v]^V$  für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$  und alle  $v \in \mathcal{V}$ .

## A.3 Basiswechsel

Ein Vektor  $v \in \mathcal{V}$  besitze bez. zweier Basen  $V, W$  von  $\mathcal{V}$  die Koordinatenvektoren  $[v]^V$  und  $[v]^W$ .

**Frage:** Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Koordinatenvektoren?

Wir stellen die Basisvektoren aus  $V$  als Linearkombinationen in der Basis  $W$  dar:

$$\begin{array}{rcccccccc} v_1 & = & t_{1,1} w_1 & + & t_{2,1} w_2 & + & \cdots & + & t_{n,1} w_n \\ v_2 & = & t_{1,2} w_1 & + & t_{2,2} w_2 & + & \cdots & + & t_{n,2} w_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ v_n & = & t_{1,n} w_1 & + & t_{2,n} w_2 & + & \cdots & + & t_{n,n} w_n \end{array}$$

und setzen

$$[\text{id}]_V^W = T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & t_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

$[\text{id}]_V^W$  heißt die **Basistransformation** von der Basis  $V$  in die Basis  $W$ .

Es gelten:

- $[\mathbf{v}]^W = [\text{id}]_V^W [\mathbf{v}]^V$ ,
- sind  $V, W, X$  drei Basen von  $\mathcal{V}$ , so ist  $[\text{id}]_V^W = [\text{id}]_X^W [\text{id}]_V^X$ ,
- $[\text{id}]_V^V = I_n$  (die  $n \times n$ -Einheitsmatrix),
- $[\text{id}]_W^V = \left([\text{id}]_V^W\right)^{-1}$ .

**Beispiel:** Sei  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$  der Raum aller Polynome  $p(\lambda) = \pi_0 + \pi_1\lambda + \pi_2\lambda^2 + \dots + \pi_n\lambda^n$  vom Grad  $\leq n$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{K}$ . (Dieser Raum ist bekanntlich  $(n + 1)$ -dimensional.)

Wir betrachten:

- die Standardbasis  $S = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n\}$ .
- Seien  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  paarweise verschieden. Setze

$$\ell_j(\lambda) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{\lambda - \alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Dann ist  $L = \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\}$  eine **Lagrange-Basis** von  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ .

- Sei  $\alpha \in \mathbb{K}$ .  $T = \{1, (\lambda - \alpha), (\lambda - \alpha)^2, \dots, (\lambda - \alpha)^n\}$  ist eine **Taylor-Basis** von  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ . (Für  $\alpha = 0$  ergibt sich der Spezialfall der Standardbasis.)

Es gelten

$$[p]^S = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix}, \quad [p]^L = \begin{bmatrix} p(\alpha_0) \\ p(\alpha_1) \\ \vdots \\ p(\alpha_n) \end{bmatrix}, \quad [p]^T = \begin{bmatrix} p(\alpha) \\ \frac{p'(\alpha)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \end{bmatrix}.$$

$$[\text{id}]_S^L = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{bmatrix}, \quad [\text{id}]_T^S = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & \cdots & (-\alpha)^n \\ 1 & -2\alpha & \cdots & n(-\alpha)^{n-1} \\ 1 & \cdots & \binom{n}{2}(-\alpha)^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

## A.4 Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  eine lineare Abbildung. Wir wollen diese lineare Abbildung durch eine Matrix beschreiben.

**Theoretische Grundlage:** Eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  ist durch die Bilder einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $\mathcal{V}$  eindeutig festgelegt. (Durch die Vorgabe von  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  ist  $\varphi(v)$  für alle  $v \in \mathcal{V}$  eindeutig bestimmt.)

**Schritt 1.** Wähle Basen  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $\mathcal{V}$  und  $W = \{w_1, \dots, w_m\}$  von  $\mathcal{W}$ .

**Schritt 2.** Bilde die Basis von  $\mathcal{V}$  unter  $\varphi$  ab, d.h. bestimme die Bilder  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in \mathcal{W}$ .

**Schritt 3.** Stelle  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  als Linearkombination der Basis von  $\mathcal{W}$  dar:

$$\begin{array}{rcl}
 \varphi(\mathbf{v}_1) & = & a_{1,1}\mathbf{w}_1 + a_{2,1}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m,1}\mathbf{w}_m \\
 \varphi(\mathbf{v}_2) & = & a_{1,2}\mathbf{w}_1 + a_{2,2}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m,2}\mathbf{w}_m \\
 \vdots & & \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \varphi(\mathbf{v}_n) & = & a_{1,n}\mathbf{w}_1 + a_{2,n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m,n}\mathbf{w}_m
 \end{array}$$

**Ergebnis:** Die Matrixdarstellung von  $\varphi$  bez. der Basen  $V$  und  $W$  ist

$$[\varphi]_V^W = A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n},$$

wobei  $m = \dim(\mathcal{W})$ ,  $n = \dim(\mathcal{V})$ .

## Rekonstruktion der Abbildung aus der Matrix.

**Gegeben:** Basen  $V$  von  $\mathcal{V}$ ,  $W$  von  $\mathcal{W}$ ; Matrix  $A = [\varphi]_V^W \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ; Vektor  $v \in \mathcal{V}$ .

**Gesucht:**  $\varphi(v)$ .

**Schritt 1:** Bestimme die Koordinaten von  $v$  bez.  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ :

$$v = V[v]^V.$$

**Schritt 2:** Berechne

$$[\varphi(v)]^W = A[v]^V = [\varphi]_V^W [v]^V, \text{ d.h. } \varphi(v) = W([\varphi]_V^W [v]^V).$$

## Regeln:

- Sei  $\varphi, \psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  linear und seien  $V, W$  Basen von  $\mathcal{V}$  bzw.  $\mathcal{W}$ :

$$\begin{aligned} [\alpha\varphi]_V^W &= \alpha[\varphi]_V^W & \forall \alpha \in \mathbb{K}, \\ [\varphi + \psi]_V^W &= [\varphi]_V^W + [\psi]_V^W. \end{aligned}$$

- Sind  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}, \psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$  linear und  $V, W, X$  Basen von  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  bzw.  $\mathcal{X}$ , dann gilt:

$$[\psi \circ \varphi]_V^X = [\psi]_W^X [\varphi]_V^W.$$

- Ist  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  ein linearer Isomorphismus und sind  $V, W$  Basen von  $\mathcal{V}$ , so ist  $[\varphi]_V^W$  invertierbar und es gilt

$$([\varphi]_V^W)^{-1} = [\varphi^{-1}]_W^V.$$

- Ist  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  invertierbar und ist  $V$  eine Basis des  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Raums  $\mathcal{V}$ , dann gibt es Basen  $X, Y$  von  $\mathcal{V}$  mit

$$T = [\text{id}]_V^Y \quad \text{bzw.} \quad T = [\text{id}]_X^V.$$

**Problem:** Gegeben zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , die beide dieselbe lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  bez. verschiedener Basen  $V$  und  $X$  von  $\mathcal{V}$  bzw.  $W$  und  $Y$  von  $\mathcal{W}$  repräsentieren:

$$A = [\varphi]_V^W, \quad B = [\varphi]_X^Y.$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $A$  und  $B$ ?

**Lösung:**

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{V}, X & \xrightarrow{[\varphi]_X^Y} & \mathcal{W}, Y \\
 [\varphi]_X^Y = [\text{id}]_W^Y [\varphi]_V^W [\text{id}]_X^V, & \begin{array}{c} [\text{id}]_X^V \downarrow \\ \mathcal{V}, V \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow [\text{id}]_W^Y \\ \mathcal{W}, W \end{array} \\
 & & \xrightarrow{[\varphi]_V^W}
 \end{array}$$

Wichtiger Spezialfall (für  $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ ,  $V = W$ ,  $X = Y$ ):

$$[\varphi]_X^X = [\text{id}]_V^X [\varphi]_V^V [\text{id}]_X^V = [\text{id}]_V^X [\varphi]_V^V ([\text{id}]_V^X)^{-1}.$$

**Beispiel.**

Die Differentiation  $d : p \mapsto p'$  ist eine lineare Abbildung von  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$  nach  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ .

Es gilt

$$[d]_S^S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & n \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Wie entscheidet man, ob zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  dieselbe lineare Abbildung  $\varphi$  bez. zweier Basen darstellen?

**Frage:** Gibt es eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  und Basen  $V$  und  $W$  sodass für zwei gegebene Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt

$$A = [\varphi]_V^V \quad \text{und} \quad B = [\varphi]_W^W?$$

Die **Antwort** lautet genau dann „ja“, wenn es eine invertierbare Matrix (Basis transformation)  $T = [\text{id}]_W^V \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt mit

$$A = TBT^{-1}.$$

Man nennt dann  $A$  **ähnlich** zu  $B$  und schreibt  $A \sim B$ .

Die Relation  $\sim$  ist eine **Äquivalenzrelation** auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$ , d.h. sie ist **reflexiv** ( $A \sim A \forall A$ ), **symmetrisch** ( $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ ) und **transitiv** ( $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ ).

Die **Äquivalenzklassen**  $[A]_{\sim} := \{B \in \mathbb{K}^{n \times n} : B \sim A\}$  bilden daher eine **Partition** von  $\mathbb{K}^{n \times n}$ .

## A.5 Jordansche Normalform

**Normalformenproblem:** Bestimme aus jeder Klasse  $[A]_{\sim}$  einen m<sup>g</sup>lichst „einfachen“ Repräsentanten.

**Oder:** Bestimme zu vorgebenem  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine m<sup>g</sup>lichst „einfache“ Matrix  $N_A$  mit  $N_A \sim A$ .

$N_A$  heißt dann **Normalform** von  $A$ .

Wir beschreiben die sog. **Jordan-Normalform** einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

**Grundidee:** Zerlege  $\mathbb{C}^n$  in eine **direkte Summe  $A$ -invarianter Unterräume**

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m.$$

**Beachte:** Ist  $V_j$  eine Basis von  $\mathcal{V}_j$ , dann ist  $V := \cup_{j=1}^m V_j$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ .  
Aus  $AV_j = V_j D_j$  folgt mit  $V := [V_1 | V_2 | \cdots | V_m]$  und  $D := \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$

$$AV = VD \quad \text{bzw.} \quad A = VDV^{-1}.$$

**Definition A.1.** Sind  $A_1$  und  $A_2$  lineare Abbildungen der Räume  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  in sich, so ist deren **direkte Summe**  $A_1 \oplus A_2$  definiert durch

$$(A_1 \oplus A_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := (A_1 \mathbf{x}_1, A_2 \mathbf{x}_2)$$

eine lineare Abbildung auf  $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ .

**Definition A.2.** Eine lineare Abbildung heißt **nilpotent** falls es eine Zahl  $q \in \mathbb{N}$  gibt mit  $A^q = O$ . Ist  $q$  die kleinste solche Zahl, so heißt  $A$  **nilpotent vom Index  $q$** .

**Definition A.3.** Ein Unterraum  $\mathcal{U}$  eines Vektorraumes  $\mathcal{V}$  heißt  **$A$ -invariant** bezüglich einer linearen Abbildung  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , falls  $A\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ . Sind  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$  zwei  $A$ -invariante Unterräume von  $\mathcal{V}$  mit  $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ , so sagt man,  $A$  wird durch  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$  reduziert.

**Satz A.4.** *Jede lineare Selbstabbildung eines endlichdimensionalen Vektorraumes ist direkte Summe einer nilpotenten Abbildung mit einer invertierbaren Abbildung.*

**Satz A.5.** *Die lineare Selbstabbildung  $A$  eines endlichdimensionalen Vektorraumes  $\mathcal{V}$  sei nilpotent vom Index  $q$  und  $x \in \mathcal{V}$  ein Vektor mit  $A^{q-1}x \neq 0$ . Dann gilt*

(a) *Die Vektoren  $\{A^j x\}_{j=0}^{q-1}$  sind linear unabhängig.*

(b) *Bezeichnet  $\mathcal{U}$  die lineare Hülle dieser Vektoren, so existiert ein weiterer Unterraum  $\tilde{\mathcal{U}}$ , sodass  $A$  durch  $\mathcal{U}$  und  $\tilde{\mathcal{U}}$  reduziert wird.*

**Bemerkung A.6.** *Ist  $\hat{x}$  ein weiterer Vektor mit  $A^{q-1}\hat{x} \neq 0$  und ist  $\hat{\mathcal{U}} := \text{span}\{\hat{x}, A\hat{x}, \dots, A^{q-1}\hat{x}\}$  sowie  $\tilde{\mathcal{U}}$  ein Unterraum, sodass  $\hat{\mathcal{U}}$  und  $\tilde{\mathcal{U}}$  die Abbildung  $A$  reduzieren, so verhält sich  $A$  auf  $\hat{\mathcal{U}}$  und  $\tilde{\mathcal{U}}$  vollkommen identisch wie auf  $\mathcal{U}$  und  $\tilde{\mathcal{U}}$ .*

**Satz A.7.** *Ist die lineare Selbstabbildung  $A$  des endlichdimensionalen Vektorraumes  $\mathcal{V}$  nilpotent vom Index  $q$ , so existieren natürliche Zahlen  $k$ ,  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k$  sowie Vektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  mit*

(a) *die Vektoren  $\{A^j \mathbf{x}_1\}_{j=0}^{q_1-1}, \{A^j \mathbf{x}_2\}_{j=0}^{q_2-1}, \dots, \{A^j \mathbf{x}_k\}_{j=0}^{q_k-1}$  bilden eine Basis von  $\mathcal{V}$ ;*

(b)  $A^{q_1} \mathbf{x}_1 = A^{q_2} \mathbf{x}_2 = \dots = A^{q_k} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ .

*Die Parameter  $k, q_1, \dots, q_k$  legen  $A$  bis auf Isomorphie fest.*

**Satz A.8.** *Ist  $A$  eine lineare Selbstabbildung des endlichdimensionalen Vektorraumes  $\mathcal{V}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von  $A$  mit Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_m$ , so ist  $\mathcal{V}$  direkte Summe von  $m$  Unterräumen  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$  mit  $\dim \mathcal{V}_j = n_j$ . Jeder dieser Räume ist  $A$ -invariant und auf  $\mathcal{V}_j$  ist jeweils die Abbildung  $A - \lambda_j I$  nilpotent.*

Ist  $A - \lambda_j I$  nilpotent von der Ordnung  $q_j$  auf  $\mathcal{V}_j$ , d.h. ist  $q_j$  die kleinste Zahl sodass  $[(A - \lambda_j I)|_{\mathcal{V}_j}]^{q_j} = O$ , so folgt

$$(A - \lambda_1 I)^{q_1} \cdots (A - \lambda_m I)^{q_m} = O,$$

d.h.

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{q_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{q_m}$$

ist das Minimalpolynom von  $A$ .

**Korollar A.9.** Sei  $A$  eine lineare Selbstabbildung des  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $\mathcal{V}$  und das charakteristische Polynom  $c_A$  gegeben durch

$$c_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m} \quad \text{mit } \lambda_j \neq \lambda_k \text{ f\"ur } j \neq k$$

sowie  $n_1 + \cdots + n_m = n$ . Dann gilt:

(a) Das Minimalpolynom von  $A$  hat die Form

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{q_1} \cdots (\lambda - \lambda_m I)^{q_m}, \quad q_j \in \mathbb{N},$$

wobei  $q_j$  jeweils die kleinste Potenz ist, für die

$$\mathcal{N}((A - \lambda_j I)^{q_j}) = \mathcal{N}((A - \lambda_j I)^{q_j + 1})$$

(b)  $\mathcal{V}$  ist die direkte Summe  $A$ -invarianter Unterräume  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$ , wobei

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{N}((A - \lambda_j I)^{q_j}) = \mathcal{N}((A - \lambda_j I)^{n_j})$$

und  $m_{A,j}(\lambda) := (\lambda - \lambda_j)^{q_j}$  das Minimalpolynom von  $A|_{\mathcal{V}_j}$  ist.

**Schritt 1.** Bestimme das **charakteristische Polynom** und die **Eigenwerte** von  $A$ :

$$c_A(\lambda) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \quad \text{mit } \lambda_j \neq \lambda_k \text{ f\u00fcr } j \neq k \text{ und } \sum_{j=1}^m n_j = n.$$

Der Eigenwert  $\lambda_j$  besitzt die **algebraische Vielfachheit**  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

**Schritt 2.** F\u00fcr jedes  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  bestimme den zu  $\lambda_j$  geh\u00f6rigen **Eigenraum**

$$\mathcal{E}_j := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{x} = \lambda_j \mathbf{x} \} = \mathcal{N}(A - \lambda_j I).$$

**Schritt 3.** F\u00fcr jedes  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  bestimme eine Basis

$$\{ \mathbf{v}_1^{(j)}, \mathbf{v}_2^{(j)}, \dots, \mathbf{v}_{g_j}^{(j)} \} \quad \text{von } \mathcal{E}_j, \quad (\dim(\mathcal{E}_j) = g_j).$$

Man nennt  $g_j \leq n_j$  die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts  $\lambda_j$ .

## Spezialfall.

- Für alle  $j = 1, 2, \dots, m$  gilt  $g_j = n_j$ , oder äquivalent
- $\mathbb{C}^n = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_m$ , oder äquivalent
- $\mathbb{C}^n$  besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ , oder äquivalent
- $A$  ist **diagonalisierbar**, d.h. ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Sei  $V = [\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{g_1}^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{g_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_1^{(m)}, \dots, \mathbf{v}_{g_m}^{(m)}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  die Matrix, deren Spalten die Basiselemente der einzelnen Eigenräume sind.  $V$  ist invertierbar und es gilt

$$AV = VD \text{ bzw. } A = VDV^{-1} \text{ mit } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m I_{n_m} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  zeigt, dass dieser Fall die Allgemeinheit nicht abdeckt:  $A$  besitzt das charakteristische Polynom  $c_A(\lambda) = \lambda^2$ , also den Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  mit algebraischer Vielfachheit  $n_1 = 2$ . Der zugehörige Eigenraum  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{N}(A - 0I) = \mathcal{N}(A) = \text{span}\{[1, 0]^\top\}$  ist aber eindimensional, d.h.  $g_1 = 1$ .  **$A$  ist nicht diagonalisierbar.**

**Schritt 2'.** Für  $j = 1, 2, \dots, m$  und  $s \in \mathbb{N}_0$  betrachten wir die Räume  $\mathcal{V}_j^{(s)} = \mathcal{N}((A - \lambda_j I)^s)$ , die – für festes  $j$  – eine aufsteigende Kette bilden:

$$\{\mathbf{0}\} = \mathcal{V}_j^{(0)} \subseteq \mathcal{V}_j^{(1)} = \mathcal{E}_j \subseteq \dots \subseteq \mathcal{V}_j^{(s)} \subseteq \mathcal{V}_j^{(s+1)} \subseteq \dots$$

Es muss einen (kleinsten) Index  $q_j \geq 1$  geben, an dem diese Kette stationär wird, d.h.  $\mathcal{V}_j^{(s)} = \mathcal{V}_j^{(q_j)} \forall s \geq q_j$ . Es gilt:  $\mathcal{V}_j^{(s)} \subsetneq \mathcal{V}_j^{(s+1)} \forall s < q_j$ .

Außerdem:

- $\mathbb{C}^n = \mathcal{V}_1^{(q_1)} \oplus \mathcal{V}_2^{(q_2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m^{(q_m)}$  und
- $\mathcal{V}_j^{(q_j)}$  ist  $A$ -invariant mit  $\dim(\mathcal{V}_j^{(q_j)}) = n_j$ .

Daneben betrachten wir die Räume  $\mathcal{W}_j^{(s)} = \mathcal{R}((A - \lambda_j I)^s)$ , die eine absteigende Kette bilden:

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{W}_j^{(0)} \supseteq \mathcal{W}_j^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{W}_j^{(s)} \supseteq \mathcal{W}_j^{(s+1)} \supseteq \dots$$

Es gilt:

$$\mathcal{W}_j^{(s)} \supsetneq \mathcal{W}_j^{(s+1)} \quad \forall s < q_j \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_j^{(s)} = \mathcal{W}_j^{(s+1)} \quad \forall s \geq q_j.$$

Außerdem:

- $\mathbb{C}^n = \mathcal{V}_j^{(q_j)} \oplus \mathcal{W}_j^{(q_j)}$  für alle  $j = 1, 2, \dots, m$  und
- $(A - \lambda_j I)^{q_j} \big|_{\mathcal{W}_j^{(q_j)}}$  ist invertierbar für alle  $j = 1, 2, \dots, m$ .

**Schritt 3'**. Wir konstruieren induktiv eine Basis von  $\mathcal{V}_j^{(q_j)}$ :

a) Wir wählen eine maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren

$$\mathbf{v}_1^{(q_j)}, \mathbf{v}_2^{(q_j)}, \dots, \mathbf{v}_{s_{q_j}}^{(q_j)} \quad \text{aus} \quad \mathcal{V}_j^{(q_j)} \setminus \mathcal{V}_j^{(q_j-1)}.$$

b) Setze nun

$$\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)} := (A - \lambda_j I) \mathbf{v}_\ell^{(q_j)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, s_{q_j}.$$

Es gelten:  $\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)} \in \mathcal{V}_j^{(q_j-1)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s_{q_j}$ .

$\{\mathbf{v}_\ell^{(q_j)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}}$  ist System aus linear unabhängigen Vektoren.

c) Wir ergänzen

$$\{\mathbf{v}_\ell^{(q_j)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}}$$

zu einem maximalen System linear unabhängiger Vektoren

$$\{\mathbf{v}_\ell^{(q_j)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-1}}, \quad (s_{q_j-1} \geq s_{q_j}) \quad \text{aus} \quad \mathcal{V}_j^{(q_j)} \setminus \mathcal{V}_j^{(q_j-2)}.$$

d) Angenommen, wir haben ein maximales System linear unabhängiger Vektoren aus  $\mathcal{V}_j^{(q_j)} \setminus \mathcal{V}_j^{(q_j-d-1)}$  konstruiert ( $d < q_j$ ):

$$\{\mathbf{w}_\ell\}_{\ell=1}^{t_{q_j-d}} = \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-1}} \cup \dots \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-d)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-d}}$$

Ist  $q_j - d - 1 > 0$  (andernfalls sind wir fertig), so definieren wir

$$\mathbf{v}_\ell^{(q_j-d-1)} := (A - \lambda_j I)\mathbf{w}_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, t_{q_j-d}.$$

Die Vektoren  $\{\mathbf{w}_\ell\}_{\ell=1}^{t_{q_j-d}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-d-1)}\}_{\ell=1}^{t_{q_j-d}}$  bilden ein linear unabhängiges System aus  $\mathcal{V}_j^{(q_j)} \setminus \mathcal{V}_j^{(q_j-d-2)}$ , das wir zu einem maximalen System linear unabhängiger Vektoren

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{w}_\ell\}_{\ell=1}^{t_{q_j-d}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-d-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-d-1}} \\ &= \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-1}} \cup \dots \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-d)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-d}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-d-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-d-1}} \end{aligned}$$

von  $\mathcal{V}_j^{(q_j)} \setminus \mathcal{V}_j^{(q_j-d-2)}$  ergänzen.

Auf diese Weise wird nach  $q_j$  Schritten eine Basis

$$\{\mathbf{v}_\ell^{(q_j)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j}} \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(q_j-1)}\}_{\ell=1}^{s_{q_j-1}} \cup \dots \cup \{\mathbf{v}_\ell^{(1)}\}_{\ell=1}^{s_1}$$

von  $\mathcal{V}_j^{(q_j)}$  konstruiert. Beachte  $s_1 \geq \dots \geq s_{q_j-1} > s_{q_j}$ .

Wir ordnen die Basisvektoren wie folgt:

$\mathbf{v}_1^{(1)},$	$\mathbf{v}_1^{(2)},$	$\dots$	$\mathbf{v}_1^{(q_j-1)},$	$\mathbf{v}_1^{(q_j)}$		$\mathbf{v}_{s_3+1}^{(1)},$	$\mathbf{v}_{s_3+1}^{(2)}$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{v}_{s_{q_j}}^{(1)},$	$\mathbf{v}_{s_{q_j}}^{(2)},$	$\dots$	$\mathbf{v}_{s_{q_j}}^{(q_j-1)},$	$\mathbf{v}_{s_{q_j}}^{(q_j)}$		$\mathbf{v}_{s_2}^{(1)},$	$\mathbf{v}_{s_2}^{(2)}$
$\mathbf{v}_{s_{q_j}+1}^{(1)},$	$\mathbf{v}_{s_{q_j}+1}^{(2)},$	$\dots$	$\mathbf{v}_{s_{q_j}+1}^{(q_j-1)},$			$\mathbf{v}_{s_2+1}^{(1)}$	
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	
$\mathbf{v}_{s_{q_j-1}}^{(1)},$	$\mathbf{v}_{s_{q_j-1}}^{(2)},$	$\dots$	$\mathbf{v}_{s_{q_j-1}}^{(q_j-1)},$			$\mathbf{v}_{s_1}^{(1)}$	
$\vdots$							

Betrachten wir eine Zeile dieser Tabelle:

$$\mathbf{v}_k^{(1)}, \mathbf{v}_k^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_k^{(\ell-1)}, \mathbf{v}_k^{(\ell)},$$

so gilt per Konstruktion

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_k^{(1)} &= \lambda_j \mathbf{v}_k^{(1)}, \\ A\mathbf{v}_k^{(2)} &= \lambda_j \mathbf{v}_k^{(2)} + \mathbf{v}_k^{(1)}, \\ &\dots \\ A\mathbf{v}_k^{(\ell-1)} &= \lambda_j \mathbf{v}_k^{(\ell-1)} + \mathbf{v}_k^{(\ell-2)}, \\ A\mathbf{v}_k^{(\ell)} &= \lambda_j \mathbf{v}_k^{(\ell)} + \mathbf{v}_k^{(\ell-1)}. \end{aligned}$$



Mit  $V_j := \cup_{k=1}^{s_1} V_{j,k}$  folgt

$$\left[ A|_{\mathcal{V}_j^{(q_j)}} \right]_{V_{j,k}}^{V_{j,k}} = J_j := \begin{bmatrix} J_{j,1} & & & \\ & J_{j,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{j,s_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}.$$

Schließlich ergibt sich mit  $V = \cup_{j=1}^m V_j$

$$[A]_V^V = J(A) := \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

die Jordan Normalform von  $A$ .

**Beispiel.** Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

besitzt das charakteristische Polynom ( $c = \text{poly}(A)$ ,  $r = \text{roots}(c)$ )

$$c_A(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3,$$

also die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . ( $\mathbb{C}^4 = \mathcal{V}_1^{(q_1)} \oplus \mathcal{V}_2^{(q_2)}$ .)

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - I)^3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mit

$$\text{rank}(A - I) = 2, \quad \text{rank}((A - I)^2) = 1, \quad \text{rank}((A - I)^3) = 1 \quad (\text{rank}).$$

Das bedeutet  $q_1 = 2$ .

$$\mathcal{N}((A - I)^2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 - x_3 + x_4\}.$$

$$\mathcal{N}(A - I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_4, x_2 = x_3\}.$$

Das heißt  $\mathbf{v}_1^{(2)} = [1, 1, 0, 0]^\top \in \mathcal{V}_1^{(2)} \setminus \mathcal{V}_1^{(1)}$ .

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = (A - I_4)\mathbf{v}_1^{(2)} = [1, 0, 0, 1]^\top.$$

$$\mathbf{v}_2^{(1)} = [0, 1, 1, 0]^\top \text{ (z.B.)}.$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

mit

$$\text{rank}(A - 2I_4) = 3 = \text{rank}((A - 2I_4)^2).$$

Das heißt  $q_2 = 1$ . Der Eigenraum  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{V}_2^{(1)}$  wird etwa von  $\mathbf{v}_3^{(1)} = [1, 0, 1, 1]^\top$  aufgespannt.

Setze

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Dann ist

$$V^{-1}AV = \left[ \begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] .$$