Numerische lineare Algebra WS 2017/2018

TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

11. Übung - Der numerische Wertebereich einer Matrix

Aufgabe 1 Als „Numerischen Wertebereich" bzw. „Numerical Range" der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnen wir die Menge $W(A) \subset \mathbb{C}$, definiert als

$$W(A) := \{ < Ax, x > \quad | \quad x \in \mathbb{C}^n, ||x|| = 1 \} .$$

Zeigen Sie dazu die folgenden Beziehungen (a) und (b)

(a) $\sigma(A) \subset W(A)$

(b) Wenn A eine normale Matrix ist, gilt $W(A) = \text{conv}(\sigma(A))$.

(c) Für allgemeines A ist die Menge $W(A)$ konvex. (Hausdorff-Toeplitz-Theorem)

Aufgabe 2 Wir zerlegen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in die beiden Anteile

$$\begin{aligned} A^+ &:= \frac{A + A^*}{2} \\ A^- &:= \frac{A - A^*}{2} \end{aligned}$$

definieren damit

- λ^+_{min} := kleinster Eigenwert von A^+
- λ^+_{max} := größter Eigenwert von A^+
- λ^-_{min} := kleinster Imaginärteil der Eigenwerte von A^-
- λ^-_{max} := größter Imaginärteil der Eigenwerte von A^-

und betrachten das so entstehende Rechteck

$$B(A) := [\lambda^+_{min}, \lambda^+_{max}] + i[\lambda^-_{min}, \lambda^-_{max}]$$

in der komplexen Ebene.

(a) Welche Symmetrie des Rechteckes $B(A)$ bezüglich der Koordinatenachsen ist bei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu erwarten ?

(b) Zeigen Sie: $W(A) \subset B(A)$.

(c) Skizzieren Sie $B(A)$ und $W(A)$ zur Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)] \end{bmatrix}$$

für $\phi = \frac{\pi}{2}$. (Hinweis: Ist die Beziehung (b) der vorherigen Aufgabe anwendbar ?)

(d) Wir schränken für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unser $W(A)$ mittels

$$W^{\mathbb{R}}(A) := \{< Ax, x > \quad | \quad x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1\}.$$

auf $W^{\mathbb{R}}(A)$ ein. Beschreiben Sie diese Menge $W^{\mathbb{R}}(A)$ und fügen Sie sie in die Skizze aus (c) mit ein.

Aufgabe 3

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $W(A)$ wie oben sei mit $\rho(A)$ der Spektralradius und mit

$$r(A) := \max_{z \in W(A)} |z|$$

der „Numerische Radius" von A bezeichnet.

(a) Zeigen Sie:

$$\rho(A) \leq r(A) \leq ||A||_2 \leq 2r(A)$$

(b) Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $r(A)$, $r(B)$ ihre numerischen Radien. Bekanntlich gilt:

$$||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Ungleichung:

$$r(AB) \leq r(A) \, r(B)$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit den Eigenwerten λ_i

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq ||A||_F^2 = \text{tr}(A^*A)$$

sowie für den Fall, dass A normal ist, sogar die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = ||A||_F^2$$

gilt.