Numerische lineare Algebra WS 2017/2018

TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

10. Übung - Matrixfunktionen II

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Kommutiert $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann kommutiert X auch mit $f(A)$.
2. Ist $A = [A_{i,j}]$ eine Blockdreiecksmatrix, dann ist dies auch $f(A) = [F_{i,j}]$. Zudem gilt dann $F_{i,i} = f(A_{i,i})$.
3. Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und f eine Funktion, für die sowohl $f(AB)$ als auch $f(BA)$ definiert ist. Dann gilt
$$Af(BA) = f(AB)A.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$
$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{spur}(A)).$$

Aufgabe 3

Für zwei Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times r}$ ist das *Kronecker-Produkt* $A \otimes B$ wie folgt definiert:
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+p)\times(n+r)}.$$

Man überzeugt sich schnell, dass Kronecker eine bilineare Abbildung ist, d.h., es gilt
$$(\alpha A + C) \otimes (\beta B + D) = \alpha\beta\, A \otimes B + \alpha\, A \otimes D + \beta\, C \otimes B + C \otimes D.$$

Zudem ist es eine assoziative Operation. Zeigen Sie:

1. Es gilt die *mixed-product property* (sofern AC, BD definiert sind)
$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$
2. Es gilt $f(A \otimes I_n) = f(A) \otimes I_n$.
3. Es gilt $f(I_n \otimes A) = I_n \otimes f(A)$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für zwei Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times r}$ gilt:

$$A \otimes B = (A \otimes I)((I \otimes B)$$

und dass die rechte Seite kommutiert.

Aufgabe 5

Erweitern Sie das Resultat aus Aufgabe 4 auf n Matrizen $A_1 \cdots A_n$ und deren Kroneckerprodukt

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$$

und konstruieren Sie einen effektiven Weg um das damit definierte Matrix-Vektor-Produkt

$$y = (A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n)x$$

für Vektoren x und y mit passender Größe zu berechnen.