Numerische lineare Algebra   WS 2017/2018

TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst   **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

9. Übung - Matrixfunktionen

Aufgabe 1

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Beweisen Sie:

1. Es gibt ein eindeutiges, monisches Polynom m_A minimalen Grades mit $m_A(A) = O$, das *Minimalpolynom* von A.
2. Ist $p \neq 0$ ein beliebiges Polynom mit $p(A) = O$, so ist m_A ein Teiler dieses Polynom. Insbesondere teilt m_A das charakteristische Polynom von A und jede Nullstelle von m_A ist daher Eigenwert der Matrix A.
3. Das Minimalypolynom von A kann aus dessen Jordanscher Normalform abgelesen werden: Sind λ_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A und ist n_μ die Dimension des größten Jordan-Blocks, der zu λ_μ gehört, dann folgt:
$$m_A(z) = \prod_{\mu=1}^{k} (z - \lambda_m u)^{n_\mu}.$$
4. Sei $A = [a_{i,j}]$ eine obere Hessenberg-Matrix, bei der die Einträge in der unteren Nebendiagonalen alle von Null verschieden sind, dann gilt $m_A(z) = \det(zI - A)$. (Man sagt, eine solche Matrix ist *nicht derogatorisch*).

Aufgabe 2

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Minimalpolynom

$$m_A(z) = \prod_{\mu=1}^{k} (z - \lambda_m u)^{n_\mu}$$

und f sei eine Funktion, so dass $f(A)$ definiert ist. Warum teilt das Minimalpolynom $m_{f(A)}$ von $f(A)$ das Polynom

$$p(z) = \prod_{\mu=1}^{k} (z - f(\lambda_\mu))^{n_\mu}?$$

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass $m_{f(A)}$ u.U. ein echter Teiler von p ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für $\eta \neq \lambda$ die Identität

$$(\eta I_n - J_n(\lambda))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta-\lambda} & \frac{1}{(\eta-\lambda)^2} & \cdots & \frac{1}{(\eta-\lambda)^{n-1}} & \frac{1}{(\eta-\lambda)^n} \\ & \frac{1}{\eta-\lambda} & \cdots & \frac{1}{(\eta-\lambda)^{n-2}} & \frac{1}{(\eta-\lambda)^{n-1}} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \frac{1}{\eta-\lambda} & \frac{1}{(\eta-\lambda)^2} \\ & & & & \frac{1}{\eta-\lambda} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $||B|| < 1$. Zeigen Sie, dass $(I+B)^{-1}$ existiert und die Abschätzung

$$\frac{1}{1+||B||} \leq ||(I+B)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||B||}$$

gilt.

Aufgabe 5

Seien $A, \widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A invertierbar. Ferner gelte $||A^{-1}|| \leq \beta$, $||A - \widetilde{A}|| \leq \alpha$ und $\alpha\beta < 1$.
Zeigen Sie, dass dann auch $\widetilde{A}$ invertierbar ist und

$$||\widetilde{A}^{-1}|| \leq \frac{1}{1-\alpha\beta}||A^{-1}|| \qquad \text{sowie} \qquad ||A^{-1} - \widetilde{A}^{-1}|| \leq \frac{\beta^2}{1-\alpha\beta}||A - \widetilde{A}||$$

gilt.

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Was kann man über eine Umgebung von A aussagen ?

Aufgabe 7

Wir betrachten eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine Störung $\delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert η im Spektrum von $A + \delta A$ höchstens den Abstand

$$\min_{\lambda_i EW von A} |\eta - \lambda_i| \leq ||S^{-1}\delta A S|| \leq \kappa(S)||\delta A||$$

mit Konditionszahl $\kappa(S)$ und $S = [v_1, \cdots v_n]$ EV von A.
Welche Besonderheit ergibt sich im Falle $A = A^*$?.