TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

7. Übung - Lanczos-Verfahren und normale Matrizen

Aufgabe 1

Das Hermitesche Lanczos-Verfahren ist eine Variante des Arnoldi-Verfahrens für den Fall einer selbstadjungierten Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
Wie vereinfacht sich das Arnoldi-Verfahren im $\mathbb{R}^n$, wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *anti-selbstadjungiert* ist, d.h., wenn

$$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = -\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

gilt?

Aufgabe 2

Eine äquivalente Charakterisierung normaler Matrizen ist die folgende:

Theorem 1. *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann normal, wenn sie sich unitär auf Diagonalform transformieren lässt.*

1. Was können Sie aus obigem Satz über die Eigenvektoren von A und die Vielfachheit der Eigenwerte von A schlussfolgern?
2. Welche Beziehung gilt zwischen den Eigenvektoren und Eigenwerten von A und A^*?
3. Nutzen Sie die spektrale Darstellung von A^* (siehe vorherige Teilaufgabe) um zu beweisen, dass ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ exisitiert, so dass $A^* = p(A)$.

Aufgabe 3

1. Es sei $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ anti-selbstadjungiert, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass $A := \exp(i\theta)(\alpha I_n + B)$ dann 1-normal ist.
2. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine d-normale Matrix mit $d \leq 1$. Beweisen Sie, dass dann A höchstens einen von Null verschiedenen Eigenwert besitzt oder A selbstadjungiert ist oder A von der Form aus Teilaufgabe (a) ist.