Numerische lineare Algebra WS 2017/2018

TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

6. Übung - Sherman-Morrison und Moore-Penrose-Inverse

1. Zeigen Sie die **Sherman-Morrison-Formel** für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $U, V \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mit $k \ll n$.
$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_k + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}$$
Wofür lässt sich diese Beziehung anwenden ?

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit grossem n folgendermassen besetzt.
$$A = \begin{bmatrix} * & * & & * & * & * & * \\ * & * & & & & & * \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ * & & & & & * & * \\ * & * & & * & * & * & * \end{bmatrix}$$
Geben Sie einen effektiven Weg zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ an.

3. Wiederholen Sie die Zusammenhänge von Normalengleichungen, Quadratmittelproblemen und überbestimmten linearen Gleichungssystemen.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $r := rank(A) = min\{m, n\}$. Zeigen Sie
$$A^\dagger = \begin{cases} (A^T A)^{-1}A^T & \text{falls} \quad r = n \le m \\ A^T(AA^T)^{-1} & \text{falls} \quad r = m \le n \\ A^{-1} & \text{falls} \quad r = m = n \end{cases}$$

5. Entscheiden Sie: Die Moore-Penrose-Inverse ist
   a) die verallgemeinerte Inverse.
   b) eine verallgemeinerte Inverse.

6. Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:
   a)
$$\begin{aligned} (A^\dagger)^\dagger &= A \\ (A^\dagger)^T &= (A^T)^\dagger \\ 0^\dagger &= 0 \\ (\lambda A)^\dagger &= \frac{1}{\lambda}A^\dagger \quad \forall \lambda \neq 0 \end{aligned}$$
   b) Falls $A = FG$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $rank(A) = r$, $F \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $G \in \mathbb{R}^{r\times n}$, dann gilt $A^\dagger = G^\dagger F^\dagger (= G^T(GG^T)^{-1}(F^T F)^{-1}F^T)$.
   c) Falls $A = UBV^T$ mit orthogonalem $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sowie $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann gilt $A^\dagger = VB^\dagger U^T$.
   d) Falls $A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$, dann ist $A^\dagger = \begin{bmatrix} B^\dagger & 0 \end{bmatrix}$.