TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

5. Übung - Krylov- und Hessenbergmatrizen

Aufgabe 1

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{r} \in \mathbb{C}^n$ sowie $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Krylov-Matrix*

$$K_m(A,\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{r}, A\boldsymbol{r}, \ldots, A^{m-1}\boldsymbol{r}] \in \mathbb{C}^{n\times m}.$$

Ferner sei für ein monisches Polynom $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ vom Grad m,

$$p(z)\pi_0 + \pi_1 z + \ldots + \pi_{m-1}z^{m-1} + z^m,$$

die zugehörige *Begleitmatrix* $F_p \in \mathbb{C}^{m\times m}$ gegeben durch

$$F_p := \begin{bmatrix} 0 & & & & & -\pi_0 \\ 1 & 0 & & & & -\pi_1 \\ & 1 & 0 & & & -\pi_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \cdots \\ & & & 1 & 0 & -\pi_{m-2} \\ & & & & 1 & -\pi_{m-1} \end{bmatrix}$$

1. Begründen Sie, dass für den Abbruchindex der Krylovfolge $A^m\boldsymbol{r}$ gilt

$$d(A,\boldsymbol{r}) = \max\{\operatorname{rang}(K_m(A,\boldsymbol{r})) : m \in \mathbb{N}\}.$$

2. Beweisen Sie induktiv, dass das charakterisische Polynom von $F_p \in \mathbb{C}^{m\times m}$ gerade das Polynom p ist.

3. Es bezeichne $a(z) = \det(zI_n - A)$ das charakteristische Polynom der Matrix A. Zeigen Sie die Beziehung

$$AK_n(A,\boldsymbol{r}) = K_n(A,\boldsymbol{r})F_a.$$

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_d\}$ eine geschachtelte Basis von $\mathcal{K}_d(A,\boldsymbol{r})$, d.h., für alle $m \leq d = d(A,\boldsymbol{r})$ ist $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ eine Basis von $\mathcal{K}_m(A,\boldsymbol{r})$. Ferner bezeichne $W_m = [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m] \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

1. Begründen Sie, dass eine obere Hessenberg-Matrix $H_d = [h_{i,j}] \in \mathbb{C}^{d\times d}$ existiert, so dass

$$AW_m = W_{m+1}H_{m+}, \qquad m = 1\ldots, d.$$

Dabei bezeichne $H_{m+} = H_d(1:m+1, 1:m)$ und wir setzen $W_{d+1} = W_d$ und $H_{d+} = H_d$.

2. Beweisen Sie, dass für $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ gilt

$$p(A)\boldsymbol{r} = \gamma\, W_{m+1}\, p(H_{m+1})\, \boldsymbol{e}_1^{(m+1)},$$

wobei $\gamma \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{e}_1^{(m+1)} = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{C}^{m+1}$.

3. Offensichtlich ist $\{\boldsymbol{r}, A\boldsymbol{r}, \ldots, A^{d-1}\boldsymbol{r}\}$ eine geschachtelte Basis von $\mathcal{K}_d(A, \boldsymbol{r})$. Bestimmen Sie die zugehörige Hessenberg-Matrix H_d.