TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

4. Übung - Projektionen und Krylovräume

Aufgabe 1

Beweisen Sie Lemma 2.20 der Vorlesung (Invarianzeigenschaft der Krylovräume).

Aufgabe 2

1. Es seien $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_M$ Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ferner sei $\boldsymbol{v} = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \beta_M \boldsymbol{x}_M$ mit $\beta_j \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, M$.
   Zeigen Sie, dass dann für den Abbruchindex der Krylov-Folge $A^m \boldsymbol{v}$ gilt $d(A, \boldsymbol{v}) = M$.

2. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$d = d(A, \boldsymbol{v}) = \min\{m : A^{-1}\boldsymbol{v} \in \mathcal{K}_m(A, \boldsymbol{v})\}.$$

Aufgabe 3

Es seien $P_1 = P_{\mathcal{R}_1,\mathcal{S}_1}$ und $P_2 = P_{\mathcal{R}_2,\mathcal{S}_2}$ Projektionen im $\mathbb{C}^n$.

1. Zeigen Sie:

$$P_1 P_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \{\boldsymbol{0}\},$$

   und, falls P_1 und P_2 orthogonal sind, so gilt

$$P_1 P_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \{\boldsymbol{0}\}.$$

   Geben Sie auch ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung im nicht-orthogonalen Fall an.

2. Zeigen Sie: $Q = P_1 + P_2$ ist eine Projektion genau dann, wenn $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$.
   Geben Sie in diesem Fall auch Bild und Kern von Q an und untersuchen Sie anhand dieser, ob Q orthogonal ist, wenn es P_1 und P_2 sind.

3. Zeigen Sie: Gilt $P_1 P_2 = P_2 P_1$, so ist $Q = P_1 P_2$ eine Projektion.
   Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung wieder das Bild und den Kern von Q und argumentieren Sie, dass Q orthogonal ist, falls dies auch auf P_1 und P_2 zutrifft.

4. Zeigen Sie nun die Beziehung aus der Vorlesung

$$P_{\mathcal{W}_m} = P_{\mathcal{V}_m} \cdots P_{\mathcal{V}_1},$$

   wobei $\mathcal{V}_j = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_j\}^\perp$, $\mathcal{W}_m = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}^\perp$ und $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ eine Orthonormalbasis (von $\mathcal{K}_m(A, \boldsymbol{b})$) sind.

   Erklären Sie damit die Äquivalenz des Arnoldi-Verfahrens und des modifizierten Arnoldi-Verfahrens in exakter Arithmetik.