
TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

---

3. Übung - Projektionen

Aufgabe 1

Geben Sie jeweils die idempotente Matrix $P_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$ zur *Projektion auf $\mathcal{R}$ orthogonal zu $\mathcal{S}$* an:

1. $\mathcal{R} = \operatorname{span}\{(1,0)^\top\}$ und $\mathcal{S} = \operatorname{span}\{(1,1)^\top\}$,
2. $\mathcal{R} = \operatorname{span}\{(1,2)^\top\} = \mathcal{S}$.

Aufgabe 2

Es sei $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ und $P = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top$ sowie $Q = I_n - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top$.

1. Bestimmen Sie Bild und Kern von P und Q und zeigen Sie, dass beide Orthogonalprojektionen sind.
2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rang} P = 1$ und $\operatorname{rang} Q = n-1$ und bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenunterräume von P und Q.

Aufgabe 3

Es seien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}^\perp$ nicht-leere, komplementäre Unterräume des $\mathbb{C}^n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Projektionen.

1. $I_n - P_{\mathcal{R},\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{R}^\perp}$.
2. $P_{\mathcal{R},\mathcal{S}}^\top$ ist eine Projektion.
3. Jede Projektion $P = P_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$ ist *diagonalisierbar*, d.h., es existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass TPT^{-1} eine Diagonalmatrix ist.
   Zu welcher Diagonalmatrix ist P ähnlich?
4. Für jede Projektion $P_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$ ist $\|P_{\mathcal{R},\mathcal{S}}\| \geq 1$. Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $P_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$ eine Orthogonalprojektion ist.
5. Eine Projektion $P_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$ ist genau dann symmetrisch – d.h., selbstadjungiert bzgl. eines zugrundeliegenden Innenproduktes – wenn sie eine Orthogonalprojektion ist.