TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

2. Übung

Hinweis: Bearbeiten Sie Aufgabe 0 und machen Sie sich mit den MATLAB-Routinen für dünnbesetzte Matrizen vertraut, wie z.B.

`sparse, spdiags, spalloc, spones, speye.`

Wählen Sie sich dann eine der beiden Aufgaben 1 oder 2 aus und bearbeiten Sie diese (ggf. in Gruppen). Achten Sie darauf, dass Sie obige Routinen für dünne Matrizen verwenden.

Aufgabe 0

MATLAB nutzt zur Speicherung dünner Matrizen das CCS-Format (*compressed column storage*) statt dem CRS-Format, welches in der Vorlesung behandelt wurde. Informieren Sie sich über das CCS-Format.
Führen Sie anschließend in MATLAB den folgenden Code aus und erklären Sie das Ergebnis.

```
n = 1e6; A = sprandn(n,n,10/n);
zeit_1 = 0;
for j = 1:100,
     x = randn(n,1);
     t = tic;
     y = A*x;
     zeit_1 = zeit_1 + toc(t);
end
zeit_1

A_T = A';
zeit_2 = 0;
for j = 1:100,
     x = randn(n,1);
     t = tic;
     y = A_T*x;
     zeit_2 = zeit_2 + toc(t);
end
zeit_2
```

Aufgabe 1

1. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die zu gegebenen Funktionen σ und u_0 und einen gegebenen Diskretisierungsparameter n die (semi-)diskrete Lösung des Anfangs-Randwertproblems (ARWP)

$$u_t - (\sigma u_x)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (x,t) \in (0,1) \times (0,T],$$

auf einem äquidistanten Gitter mit Maschenweite $h = 1/(n+1)$ berechnet.

Verwenden Sie dabei die MATLAB-Routine `expm` zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion.

Reproduzieren Sie insbesondere Abbildung 2 aus Kapitel 1 der Vorlesung. Wählen Sie dabei $n = 1024$ und als Zeitschrittweite $\Delta t = 0.005$. Nutzen Sie zum Erstellen der Grafik die Befehle `meshgrid` und `surf`.

2. Es sei $\sigma(x) \equiv c > 0$ konstant und die Anfangsbedingung u_0 gegeben durch

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \, \sin(j\pi x), \qquad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann die Lösungs des obigen ARWP gegeben ist durch

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \, \sin(j\pi x) \, \exp(-cj^2\pi^2 t).$$

3. Es sei nun $\sigma(x) \equiv 1$ sowie u_0 wie oben gegeben mit $k = 4$ und $\alpha_j = j$. Untersuchen Sie mittels ihrers Programms aus Teilaufgabe (a) wie der Fehler

$$\left\| [u(x_j,t)]_{j=1}^{n} - \boldsymbol{u}(t) \right\|_\infty$$

zwischen exakter und (semi-)diskreter Lösung von h und t abhängt.

Fixieren Sie dabei $t = 0.1$ für die Untersuchungen bzgl. h und wählen Sie $n = 2^1, \ldots, 2^{10}$.

Setzen Sie umgekehrt $n = 1024$ und $t = 2^0, \ldots, 2^{-24}$ für die Untersuchungen bzgl. t.

Aufgabe 2

Als weitere Anwendung von Eigenwerten wollen wir *Markovketten* betrachten. Diese sind eine Abfolge/Kette von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Markoveigenschaft

$$\mathbb{P}(X_n \in A \,|\, X_0, \ldots X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n \in A \,|\, X_{n+1}),$$

d.h. grob gesagt, dass der n-te Zustand X_n nur vom vorangegangenen Zustand X_{n-1} abhängt.

Wir betrachten als Beispiel einer Markovkette die Irrfahrt eines Partikels auf einem dreieckigen Gitter

$$\mathcal{T}_k := \{(i,j) : 0 \le i,j \le k, i+j \le k\}$$

siehe auch Abb. 1 für $k = 4$. Das Teilchen bewegt sich zufällig aus der Position (i,j) nach $(i-1,j)$ oder $(i,j-1)$ mit einer Gesamtwahrscheinlichkeit von

$$p_{\mathrm{SW}}(i,j) = \frac{i+j}{k},$$

wobei diese gleichmäßig auf beide Knoten verteilt wird, sofern (i,j) einen linken und unteren Nachbarn besitzt. Desweiteren bewegt sich der Partikel von (i,j) nach $(i+1,j)$ oder $(i,j+1)$ mit einer Gesamtwahrscheinlichkeit von

$$p_{\mathrm{NO}}(i,j) = 1 - p_{\mathrm{SW}}(i,j),$$

erneut wird diese gleichmäßig verteilt, falls rechter und oberer Nachbar existieren.

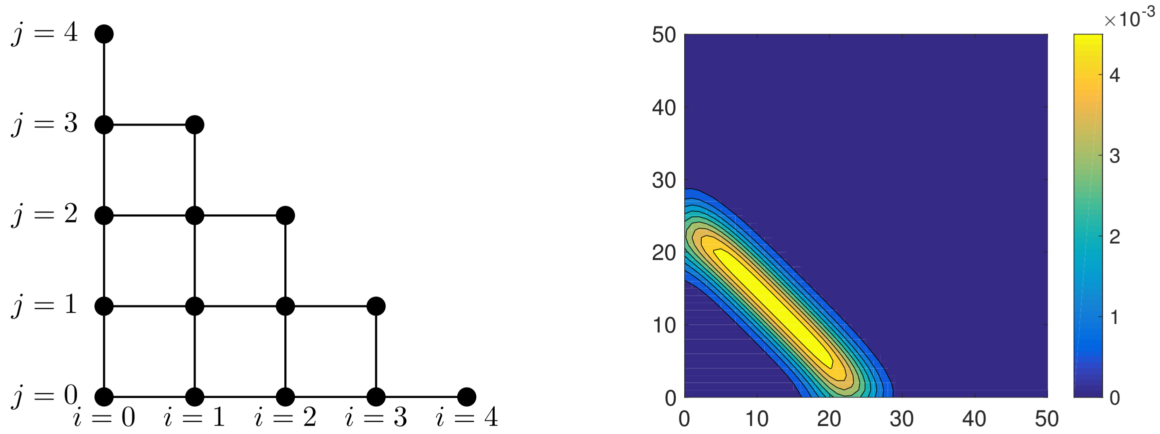

Abbildung 1: Gitter $\mathcal{T}_k$ für $k = 4$ (links) und stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}_\infty$ für $k = 50$ (rechts).

Wir nummerieren nun alle $N = (k+1)(k+2)/2$ Knoten des Gitters $\mathcal{T}_k$ lexikografisch von links nach rechts und unten nach oben durch:

$$(0,0), (1,0), (2,0), \ldots, (k,0), (0,1), (1,1), \ldots, (k-1,1), (0,2), \ldots, (1,k-1), (0,k).$$

Die Zufallsvariable X_n der Markovkette sei nun der zufällige *Zustand* des Partikels, d.h., der (durchnummerierte) Knoten des Gitters, in dem sich der Partikel im n-ten Schritt der Kette aufhält. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{p}_n$ die diskrete Verteilung von X_n und mit $A = [a_{\mu\nu}]_{\mu,\nu=1}^N$ die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten von Zustand μ zu Zustand ν:

$$a_{\mu\nu} = \mathbb{P}(\mu \to \nu), \qquad 1 \le \mu, \nu \le N.$$

Dann gilt

$$\boldsymbol{p}_{n+1}^\top = \boldsymbol{p}_n^\top A.$$

Ferner kann gezeigt werden, dass A zum Eigenwert $\lambda = 1$ einen *linken* Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ hat, d.h.

$$\boldsymbol{x}^\top A = \boldsymbol{x}^\top.$$

Normiert man diesen Eigenvektor, so dass $\sum_{l=1}^N x_l = 1$ und $x_l \ge 0$, entspricht dieser der stationären Verteilung $\boldsymbol{p}_\infty$ der Markovkette:

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_\infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_{n+1} = \boldsymbol{p}_n^\top A = \boldsymbol{p}_\infty.$$

Diese stationäre Verteilung ist häufig von Interesse. Ihre Bedeutung liegt in dem Grenzverhalten

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_\infty,$$

welches unter gewissen Bedingungen bewiesen werden kann.

1. Zeigen Sie, dass A den Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt und dass alle Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner oder gleich 1 sind.

   Hinweis: A ist eine *zeilenstochastische* Matrix. Dies liefert sofort den (rechten) Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.

2. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, was für gegebenes k die entsprechende, schwach besetzte Übergangsmatrix A erstellt.

   Erstellen Sie für $k = 50$ die Matrix A mittels Ihres Programms und berechnen Sie die stationäre Verteilung der Markovkette $\boldsymbol{p}_\infty$ mit Hilfe von `eig` und `full`.

   Reproduzieren Sie insbesondere die rechte Grafik aus Abb. 1. Nutzen Sie dazu `meshgrid` und `contourf`.

3. Wählen Sie nun als Startverteilung $\boldsymbol{p}_0$ der Kette einmal die Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, N\}$ und einmal $\boldsymbol{p}_0 = (1, 0, \ldots, 0)^\top$. Untersuchen Sie jeweils das Konvergenzverhalten der Verteilungen der Markovkette $\boldsymbol{p}_n$ gegen $\boldsymbol{p}_\infty$.

   Plotten Sie insbesondere für $n = 1, \ldots, 1000$ den Fehler $\|\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_\infty\|_\infty$ sowie die Verteilung $\boldsymbol{p}_{1000}$. Was beobachten Sie?

4. Das beobachtete Verhalten aus obiger Teilaufgabe kann man beheben, indem man die Markovkette *lazy* macht. Das bedeutet, man nimmt nun die Übergangsmatrix $A_{\text{lazy}} = 0.5(I + A)$ statt A.

   Machen Sie sich klar, dass sich dadurch die stationäre Verteilung nicht ändert.

   Welchen Effekt hat das *lazy* machen auf das Spektrum der verwendeten Übergangsmatrix?

   Führen Sie nun bzgl. der Kette $\boldsymbol{p}_{n+1}^\top = \boldsymbol{p}_n^\top A_{\text{lazy}}$ die gleichen Tests aus wie in Teilaufgabe (c).