Numerische lineare Algebra WS 2017/2018

TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik - Professur Numerische Mathematik

Vorlesung: Prof. Dr. Oliver Ernst **Übung: Dr. Roman Unger**

Homepage zur Übung: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/nla-2017`

1. Übung

Aufgabe 1

Eine *Permutation* π von n Objekten ist eine bijektive Abbildung von $\{1,\dots,n\}$ auf $\{1,\dots,n\}$. Wir schreiben auch $\pi = [\pi(1)\ \pi(2)\ \dots\ \pi(n)]$. Die Permutationen bilden bzgl. der Komposition $(\pi\circ\sigma)(j) := \pi(\sigma(j))$ eine Gruppe der Ordnung $n!$ – die sogenannte *symmetrische Gruppe* $\mathcal{S}_n$. Die zu $\pi \in \mathcal{S}_n$ inverse Permutation wird mit π^{-1} bezeichnet. Durch $\pi \in \mathcal{S}_n$ wird eine *Permutationsmatrix* $P_\pi = [p_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert:

$$p_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = \pi(i), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $p_{ij} = \delta_{\pi(i),j}$, wobei δ das Kronecker-Symbol bezeichne.

Zeigen Sie:

1. Für $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)^\top \in \mathbb{C}^n$ gilt
$$P_\pi \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x}^\top P_\pi = \left(x_{\pi^{-1}(1)},\dots,x_{\pi^{-1}(n)}\right)$$
2. Die Abbildung
$$\mathcal{S}_n \ni \pi \mapsto P_\pi \in \mathbb{S}^{n\times n} := \{ \text{ alle } n\times n \text{ Permutationsmatrizen } \}$$
ist ein *Antihomomorphismus* bzgl. der Operation $\circ$ in $\mathcal{S}_n$ und der Matrixmultiplikation in $\mathbb{S}^{n\times n}$, d.h., $P_{\pi\circ\sigma} = P_\sigma P_\pi$. Schlußfolgern Sie daraus, dass $P_\pi^{-1} = P_{\pi^{-1}}$.
3. Es gilt $P_{\pi^{-1}} = P_\pi^\top$. Permutationsmatrizen sind also orthogonale Matrizen.
4. Ist $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit i-ter Zeile $A(i,:)$ und j-ter Spalte $A(:,j)$, dann lautet die i-te Zeile von $P_\pi A$ eben $A(\pi(i),:)$ und die j-Spalte von $AP_\pi^\top$ ist die Spalte $A(:,\pi(j))$. Insbesondere gilt $P_\pi A P_\pi^\top = [a_{\pi(i)\pi(j)}]_{i,j=1}^n$.

Aufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann irreduzibel ist, wenn es für jede beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ von $\mathcal{Z}_n = \{1,\dots,n\}$ mit $\mathcal{I},\mathcal{J} \neq \emptyset$ und $\mathcal{I}\cap\mathcal{J} = \emptyset$, einen Eintrag $a_{ij} \neq 0$ von A gibt mit $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$.

2. Beweisen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (a) das Lemma 1.6 (Charakterisierung irreduzibler Matrizen) der Vorlesung.

Aufgabe 3

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $s_k(z) = \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!}$ die k-te Partialsumme der Exponentialreihe. Wir definieren die $(k+1)$-te φ-*Funktion* durch

$$\varphi_{k+1}(z) := \frac{\mathrm{e}^z - s_k(z)}{z^{k+1}}$$

und setzen $\varphi_0(z) = \mathrm{e}^z$. Zeigen Sie:

1. φ_k ist ein ganze Funktion mit Taylorreihe $\varphi_k(z) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{z^{j-k}}{j!}$.
2. Die φ-Funktionen genügen der Rekursion
$$\varphi_{k+1}(z) = \frac{\varphi_k(z) - \frac{1}{k!}}{z}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$
3. Es gilt
$$\varphi_k(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \mathrm{e}^{(1-t)z} t^{k-1} \,\mathrm{d}t, \qquad k \in \mathbb{N}.$$
4. Für reelle z gilt $\varphi_k(z) > \varphi_{k+1}(z) > 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

1. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $k \in \mathbb{Z}$ sowie
$$f(t) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j A^{j+k},$$
wobei für $t \in I$ mit I als offener Teilmenge von $\mathbb{R}$ gelte
$$\sum_{j=0}^{\infty} (1+j)|a_j|\,|t|^j \|A\|^{j+k} < \infty.$$
Zeigen Sie, dass dann gilt
$$f'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j t^{j-1} A^{j+k}, \qquad t \in I.$$
2. Beweisen Sie mittels der Aussage aus Teilaufgabe (a) das Korollar 1.9 der Vorlesung.