

## Übung 0 : Grundlagen

1. Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen die Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Eigen- und Hauptvektoren.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. „The big Six Matrix Decompositions“

Wiederholen Sie die Eigenschaften der folgenden Matrixfaktorisierungen:

- 2.1. Choleskyzerlegung
- 2.2. Pivotsierte LU-Zerlegung
- 2.3. QR-Zerlegung
- 2.4. Spektralzerlegung
- 2.5. Schurzerlegung
- 2.6. Singulärwertzerlegung (SVD)

Besprechen Sie auch Existenz und Eindeutigkeit. Welche Algorithmen kennen Sie für die einzelnen Zerlegungen ?

3. Zeigen Sie, dass die dünne QR-Zerlegung  $A = Q_1 R_1$  eindeutig ist, falls  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m > n$ ) vollen Spaltenrang hat.  $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  hat dabei orthonormale Spalten und  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist eine obere Dreiecksmatrix. Desweiteren geht  $R_1$  aus dem unteren Dreiecksfaktor  $G$  der Cholesky-Faktorisierung von  $A^T A$  durch die Identität  $R_1 = G^T$  hervor.
4. Wir betrachten für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $s = \text{rank}(A)$  eine Singulärwertzerlegung

$$A = U \Sigma V^T$$

mit orthonormalem  $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und orthonormalem  $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  
Zeigen Sie:

- a) Wenn  $k < s$  und  $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$  ist, gilt:

$$\min_{\text{rank}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

- b)

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \text{span}\{v_{s+1}, \dots, v_n\} \\ \text{im}(A) &= \text{span}\{u_1, \dots, u_s\} \end{aligned}$$

- c)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_s^2}$$