TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 3. Mai 2019
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz, Dipl.-Math. Michael Quellmalz

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2019

3. Übung: Komplexe Funktionen und Differenzierbarkeit

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f(z) = f(x+iy)$ (auf dem maximalen Definitionsbereich betrachtet) unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Differenzierbarkeit. Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung $f'(z)$ nur unter Verwendung von z an.

a) $f(z) = z^2$,

b) $f(z) = |z|^2$,

c) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$,

d) $f(z) = e^y(\sin x + i\cos x)$,

e) $f(z) = \frac{1}{z}$,

f) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

Aufgabe 2

Ist $u(x,y)$ eine harmonische Funktion? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine zugehörige konjugiert harmonische Funktion und das zugehörige komplexe Potential.

a) $u(x,y) = x\sin y$,

b) $u(x,y) = \cos x \sinh y$,

c) $u(x,y) = -e^y \cos x$.

Aufgabe 3

Sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Stellen Sie die Niveaulinien $u(x,y) = 0$ und $v(x,y) = 0$ graphisch dar. Berechnen Sie außerdem $f'(z)$.

a) $f(z) = (1+i)z$,

b) $f(z) = z^2 - 1 - i$.

Z: Berechne die Tangentenvektoren

$$t_u = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad t_v = \left(-\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

und ihr Skalarprodukt $t_u \cdot t_v$. In welchem Verhältnis stehen t_u und t_v zueinander?