TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 8. April 2019
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz, Dipl.-Math. Michael Quellmalz

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2019

1. Übung: Differentialoperatoren

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} v_1(\boldsymbol{x}) \\ v_2(\boldsymbol{x}) \\ v_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

gilt: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{v})) = 0\,.$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Rotation von $v(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 + x_2 + x_2\,x_3 \\ x_1 + x_1\,x_3 \\ x_1\,x_2 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Divergenz von

(a) $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_1x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2\,x_1^2 - x_2\,x_3 \\ x_2\,e^{x_3} \\ x_1\,e^{x_3} + x_2 \end{bmatrix}$, (c) $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ bzw. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$).

Aufgabe 4

Berechnen Sie

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}\right).$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie Δu für folgende Skalarfelder im $\mathbb{R}^n$.

$$u(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha}, \qquad u(\boldsymbol{x}) = \ln(\|\boldsymbol{x}\|).$$

Für welche n gilt $\Delta u = 0$?

Aufgabe 6

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{v} : G \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{c}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ eine symmetrische Jacobi-Matrix besitzt, aber kein Potentialfeld in G ist. Woran liegt das?

Aufgabe 7

Überprüfen Sie, ob das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$$

ein Vektorpotential besitzt und berechnen Sie gegebenenfalls ein Vektorpotential $\boldsymbol{w}$ von $\boldsymbol{v}$.