Mathematik IV
(für IF, ET, Ph)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Studiengänge: B Informatik, B Angewandte Informatik, B Elektrotechnik und Informationstechnik, B Regenerative Energietechnik, B Elektromobilität, B Physik, B Computational Science

Mathematik! TU Chemnitz

Inhalt I

Inhalt

Funktionentheorie

- Das mathematische Gebiet Funktionentheorie (engl. complex analysis) behandelt die Theorie der Funktionen

$$f : D \to \mathbb{C}, \qquad D \subset \mathbb{C}, \quad D \text{ ein Gebiet},$$

welche komplex differenzierbar sind.

- Letzteres bedeutet, dass für alle $z_0 \in D$ folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Dies führt zu enormen Unterschieden gegenüber der Differenzierbarkeit einer Funktion (Vektorfeld) $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
- Zunächst erinnern wir uns an das Rechnen mit komplexen Zahlen (vgl. Mathematik I).

Inhalt

- Eine komplexe Zahl ist ein Ausdruck der Form

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

mit Realteil $x = \operatorname{Re} z$, Imaginärteil $y = \operatorname{Im} z$ sowie einer nichtreellen Zahl i, genannt imaginäre Einheit, mit der definierenden Eigenschaft

$$i^2 = -1.$$

- Dadurch ergeben sich die Rechenregeln für Summe und Produkt zweier komplexer Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ als

$$z + w = (x + u) + i(y + v), \quad zw = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

- Man könnte formal komplexe Zahlen genauso als Paare reeller Zahlen (x, y) definieren mit der entsprechenden Definition für Summe und Produkt:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \qquad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Dabei entspräche der Zahl i das Paar $(0, 1)$.

Wir betrachten nochmals die Multiplikation einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit einer komplexen Zahl $w = u + iv$ und betrachten diese Operation als Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto T(z) = wz. \end{aligned}$$

In Polardarstellung

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}, \qquad w = r_w\,\mathrm{e}^{i\varphi_w}$$

erhält man sofort

$$T(z) = wz = r_w \cdot r \cdot \mathrm{e}^{i(\varphi+\varphi_w)}.$$

Stellen Sie die Abbildung T als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ dar.

Wie im Reellen definiert der Betrag komplexer Zahlen auf $\mathbb{C}$ eine Metrik, d.h. eine Abbildung

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{R}_0^+, \\ (z, w) &\mapsto d(z, w) := |z - w|, \end{aligned}$$

sodass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $d(z, w) \geq 0; \quad d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$,
2. $d(z, w) = d(w, z)$,
3. $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w) \qquad \forall u \in \mathbb{C}$.

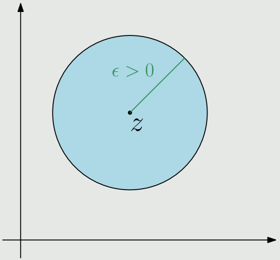
Eine Menge mit einer Metrik versehen nennt man auch einen metrischen Raum. In einem metrischen Raum kann man auf einfache Weise Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit von Abbildungen etc. definieren und untersuchen.

Definition 14.1 (Konvergenz komplexer Zahlenfolgen)

1. Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Zahl z_n zuordnet.
2. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ sowie $z \in \mathbb{C}$. Dann heißt (z_n) konvergent gegen z, in Zeichen

$$z_n \to z \text{ für } n \to \infty, \qquad z_n \xrightarrow{n\to\infty} z, \qquad \text{oder } \lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

falls $d(z_n, z) \to 0$ für $n \to \infty$.



Man untersuche die folgenden komplexen Zahlenfolgen auf Konvergenz:

- $z_n = i^n$,
- $z_n = \frac{1}{n} i^n$,
- $z_n = \frac{1}{n} + in$.

- Wie im Reellen sind konvergente Zahlenfolgen beschränkt (Umkehrung?).
- Ist (z_n) konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} d(z_n, z_{n+1}) = 0$ (Umkehrung?).

Lemma 14.2

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $z \in \mathbb{C}$. Dann gelten

- **a** $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \;\Leftrightarrow\; \overline{z}_n \xrightarrow{n\to\infty} \overline{z}$.
- **b** *Mit $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ gelten auch*

$$\operatorname{Re} z_n \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z_n \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{Im} z, \quad \textit{sowie} \quad |z_n| \xrightarrow{n\to\infty} |z|.$$

- **c** *Konvergiert zusätzlich die komplexe Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $w \in \mathbb{C}$, so gilt*

$$z_n + w_n \xrightarrow{n\to\infty} z + w \quad \textit{sowie} \quad z_n \cdot w_n \xrightarrow{n\to\infty} z \cdot w.$$

Beachte: Argumente müssen nicht konvergieren.

Definition 14.3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine komplexe Folge. Dann heißt

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

die n-te Partialsumme und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe.

- Damit ist auch klar, was Konvergenz von Reihen im Komplexen bedeutet.
- Erinnerung: (vgl. Mathematik II, Kapitel 3) Damit eine unendliche Reihe konvergiert, müssen ihre Glieder hinreichend schnell gegen Null gehen. Grob: $1/n$ zu langsam (harmonische Reihe), $1/n^2$ schnell genug.
- Resultate zur (absoluten) Konvergenz von reellen Reihen lassen sich wörlich ins Komplexe übertragen. (geometrische Reihe, Wurzel- und Quotientenkriterium).

Definition 14.4

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in D$ falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |z - z_0| \le \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \le \epsilon.$$

Beachte: Entsprechend kann man Stetigkeit auch für Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definieren.

Wenden Sie die Definition auf eine konstante Funktion und die Identität $f(z) = z$ an.

Bemerkung: Für eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ sind äquivalent:

1. f ist stetig in z_0.
2. Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D gilt:

$$z_n \to z_0 \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(z_n) \to f(z_0) \text{ für } n \to \infty.$$

Satz 14.5 (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig in z_0.

1. *Dann sind auch $f + g$ sowie $f \cdot g$ stetig in z_0.*
2. *Gilt zusätzlich $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so ist auch f/g stetig in z_0.*

Satz 14.6

Die Exponentialfunktion ist stetig auf $D = \mathbb{C}$.

Bemerkung: Natürlich folgt aus den Rechenregeln, dass Polynome stetig Funktionen sind; die Exponentialfunktion ist ein Beispiel für ein „Polynom mit unendlich vielen Summanden“, also eine Potenzreihe.

Inhalt

Definition 14.7

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt (komplex) differenzierbar in z_0, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Ist f für alle $z_0 \in D$ differenzierbar, so nennen wir f holomorph in D.

Wir werden im Folgenden bemerkenswerte Eigenschaften holomorpher Funktionen kennenlernen:

- f holomorph $\Rightarrow f'$ holomorph.
- f holomorph in $\mathbb{C} \Rightarrow f$ analytisch, d.h. es gibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
- Identitätssatz: f, g, holomorph in $\mathbb{C}$ und $f|_{\mathbb{R}} = g|_{\mathbb{R}} \Rightarrow f = g$.
- Integraldarstellung holomorpher Funktionen:
  Ist γ eine geschlossene Kurve im Holomorphiegebiet von f, so gilt
  $$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$
  Liegt die Kugel $K_r(z_0)$ im Holomorphiegebiet von f zo gilt
  $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(Caychysche Integralformel).}$$

Satz 14.8 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

Ist $f : z \to f(z)$ holomorph in der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$, so existieren die partiellen Ableitungen von $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ als Funktionen von $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind eine notwendige Bedingung für (komplexe) Differenzierbarkeit.
- Man kann zeigen: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, welche an $z_0 \in D$ als Funktion der reellen Variablen $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ (total) differenzierbar ist, ist genau dann als Funktion von z dort (komplex) differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen von $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen.

- Eine komplexe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ ist also im Punkt $z_0 \in D$ reell differenzierbar, wenn es komplexe Zahlen A, B gibt mit

$$f(z) = f(z_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(z - z_0), \qquad z \to z_0, \quad \text{(14.1a)}$$

für $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. In diesem Fall muss also gelten

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \text{(14.1b)}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \quad \text{(14.1c)}$$

- Umgekehrt folgt aus Satz 9.17 (Mathematik III), dass eine komplexe Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen im Punkt z_0 dort auch reell differenzierbar ist.

- Die Beziehungen (14.1) lassen sich einfacher Schreiben durch die Einführung der Differentialoperatoren (Wirtinger-Operatoren)

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

- Diese ergeben eingesetzt in (14.1)

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) + o(z-z_0). \tag{14.2}$$

- Da $\lim_{z\to z_0}(\overline{z-z_0})/(z-z_0)$ nicht existiert kann f an der Stelle z_0 nur dann komplex differenzierbar sein, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \qquad \text{und damit} \qquad f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Folgerung 14.9

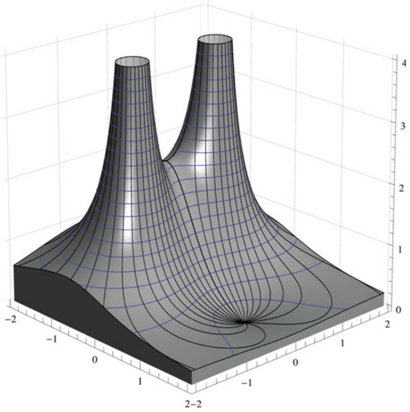
Ist f holomorph in der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$, und dort sogar zweimal stetig differenzierbar, so sind $u = \operatorname{Re} f$ sowie $v = \operatorname{Im} f$ harmonische Funktionen, d.h. sie erfüllen die Laplace-Gleichungen

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Lemma 14.10

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Dann gibt es für $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch eine harmonische Funktion $v : D \to \mathbb{R}$ sodass $u + iv$ holomorph in D ist. Die Funktion v wird zu u konjugiert-harmonische Funktion genannt und ist bis auf Kontanten eindeutig bestimmt.

- Im Gegensatz zu Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist zur Visualisierung von Funktionen von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Darstellung von vier Dimensionen erforderlich.
- Betrachtet man nur die Abbildung $z \mapsto |f(z)|$ als „Gebirge" über der komplexen Ebene spricht man von der analytischen Landschaft der Funktion f.

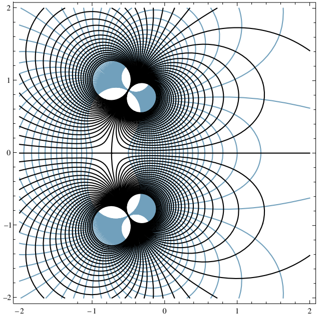


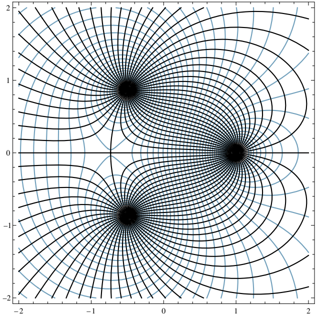
Analytische Landschaft der Funktion

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+z+1}.$$

Höhenlinien: blau,
Falllinien: schwarz.

Quelle: Bornemann 2013





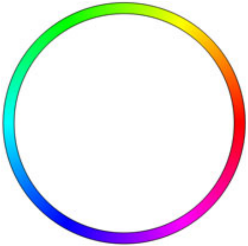
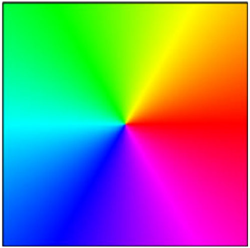
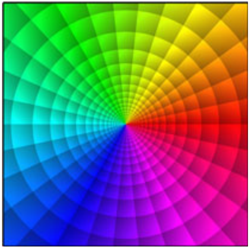
Gleiche Funktion f

- Links:
  $\operatorname{Re} f$ (blau),
  $\operatorname{Im} f$ (schwarz)
- Rechts:
  $\log |f|$ (blau),
  $\arg f$ (schwarz)

Quelle: Bornemann 2013

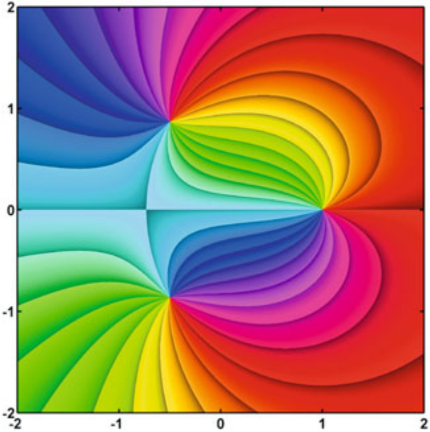
- Höhenlinien von $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$: Nullstellen nicht zu erkennen.
- Niveaulinien von u und v sind orthogonal.
- Äquidistante u/v-Höhenlinien „im Kleinen“ nahezu quadratisch.
- Fazit: Falllinien von $|f|$ sind Niveaulinien von $\arg f$

- Als Phase einer komplexwertigen Funktion f bezeichnet man die Größe $f/|f|$. Um die Visualisierung holomorpher Funktionen anhand ihres Phasenportraits hat sich der Freiberger Mathematiker E. Wegert verdient gemacht.
- Da $f/|f|$ auf dem EInheitskreis liegt kann man sie durch einen Farbenkreis visualisieren.

Farbenkreis, einfaches und mit Grauwerten versehenes Phasenportrait der Funktion $f(z) = z$.

Quelle: Wegert 2012



Quelle: Bornemann 2013

Phasenportrait der Funktion $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+z+1}$

Inhalt

- Wie im $\mathbb{R}^d$ definieren wir Kurven in $\mathbb{C}$ als stückweise stetig differenzierbare Abbildungen
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto z(t),$$
eines Parameterintervalls $(a,b) \subset \mathbb{R}$.
- Ist f auf dem Bild $\gamma((a,b))$ definiert und stetig, so ist auch die Funktion $t \mapsto f(z(t))$ stetig auf (a,b) und wir definieren das Kurvenintegral von f längs γ durch
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Ist $z'(t)$ nicht stetig im ganzen Intervall (a,b), so muss dieses geeignet in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden.
- Ist das Intervall beschränkt und abgeschlossen, so ist die Integrierbarkeit gesichert, andernfalls muss man diese zusätzlich fordern.

Lemma 14.11

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\int_{\partial K_1(0)} z^k \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi i, & \text{für } k = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei parametrisieren wir $\partial K_1(0)$ wie üblich durch

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad z(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}.$$

Satz 14.12 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, f holomorph in U, f' stetig, $z_0 \in U$, $r > 0$ mit $K_r(z_0) \subset U$. Dann gilt für alle $|z - z_0| < r$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = f(z).$$

Wir wollen nun zeigen, dass stetige komplex-differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ sogar analytisch sind. Aus der Cauchyschen Integralformel für Kreisscheiben wissen wir bereits, dass die z-Abhängigkeit im Term $1/(\zeta - z)$ steckt; diesen wollen wir in eine Potenzreihe entwickeln.

Satz 14.13

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar. Dann ist f analytisch, d.h. für alle $z_0 \in U$ gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } |z - z_0| \text{ hinreichend klein.} \tag{14.3}$$

Genauer: Ist $r > 0$ so klein, dass $K_r(z_0) \subset U$, so können wir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta$$

setzen und (14.3) *gilt für $|z - z_0| < r$.*

Folgerung 14.14

Sei f holomorph in U und f' stetig, dann ist f beliebig oft differenzierbar. Ist $K_r(z_0) \subset U$, so gilt

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Inhalt

Hier soll es darum gehen, die Zusatzannahme der Stetigkeit von f' loszuwerden.

Bemerkung: Sei U offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Falls f eine komplexe Stammfunktion besitzt, es also eine holomorphe Funktion F gibt mit $F' = f$, so ist f analytisch. (Warum?)

Satz 14.15 (Morera)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt für jeden Dreiecksweg Δ

$$\int_\Delta f(z)\ \mathrm{d}z = 0,$$

so besitzt f eine Stammfunktion, ist insbesondere analytisch und holomorph.

Unter einem Dreiecksweg verstehen wir die geradlinige Verbindungsstrecke dreier Punkte $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Satz 14.16 (Goursat)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U. Dann ist f analytisch.

Beweis durch Nachprüfen der Voraussetzungen des Satzes von Morera für holomorphe Funktionen.

Bezeichnung: Mit $\mathscr{H}(U)$ sei die Menge aller auf der offenen Menge U holomorphen Funktionen auf U bezeichnet.

Fazit: Jede in einer offenen Menge U holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar und durch eine Potenzreihe darstellbar.

Inhalt

Satz 14.17 (Cauchysche Abschätzung)

Sei $f \in \mathscr{H}(U)$, $K_R(z_0) \subset U$ *offen und* $\sup\{|f(z))| : z \in K_R(z_0)\} \leq M$. *Dann gilt:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Definition 14.18

Eine Funktion $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ heißt ganze Funktion.

Satz 14.19 (Satz von Liouville)

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Satz 14.20 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nichtkonstante Polynom p besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

Bemerkung: Mit Polynomdivision und Induktion folgt, dass jedes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. geschrieben werden kann als

$$a_0(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Satz 14.21 (Identitätssatz)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(D)$. Dann sind äquivalent

1. $f \equiv 0$
2. *Es gibt $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*
3. $\{z \in D : f(z) = 0\}$ *ist nicht diskret in D.*

Dabei heißt eine Menge $M \subset D$ diskret, wenn es für alle $z \in M$ ein $r > 0$ gibt mit $M \cap K_r(z) = \{z\}$.

Beispiele:

1. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist nicht diskret in $\mathbb{C}$.
2. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist diskret in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Folgerung 14.22

Sei D ein Gebiet, $f, g \in \mathscr{H}(D)$ und $\{z : f(z) = g(z)\}$ sei nicht diskret in D. Dann ist $f \equiv g$.

Beispiele:

1. $$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{iz} = \cos z + i \sin z \text{ für alle } t \in \mathbb{C}.$$
2. Aus $\sin' x = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt $\sin' z = \cos z$ auf $\mathbb{C}$.

Folgerung 14.23

Sei D ein Gebiet, $f \in \mathscr{H}(D) \setminus \{0\}$ und $z_0 \in D$.

a. *Es gibt $k \in \mathbb{N}_0$, $r > 0$ und $g \in \mathscr{H}(K_r(z_0))$ mit*

$$f(z) = (z - z_k)^k g(z) \qquad \text{für } z \in K_r(z_0).$$

b. *Es gibt $r > 0$ mit $f(z) \neq 0$ für $z \in K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.*

Inhalt

Für $f \in \mathscr{H}(K_R(z_0))$ und $\gamma : [a, b] \to K_R(z_0)$ wissen wir, dass f eine Stammfunktion F besitzt, insbesondere ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Dies folgt durch einfache Rechnung nach gliedweiser Integration der Potenzreihendarstellung von f um z_0. Somit gilt insbesondere für jede geschlossene Kurve γ

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dass dies nicht immer gilt, sieht man an folgendem, bereits behandelten Beispiel: für $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = 1/z$ gilt $f \in \mathscr{H}(U)$, aber

$$\int_{\partial K_r(0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \qquad \forall r > 0.$$

Satz 14.24 (Cauchyscher Integralsatz)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in \mathscr{H}(U)$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede geschlossene stückweise glatte Kurve γ.

Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und $z_0 \notin \gamma(I)$, so ist

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \in 2\pi i\,\mathbb{Z}.$$

Für kreisförmige Kurven haben wir dies schon gezeigt.

Definition 14.25

Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve in und $z_0 \notin \gamma(I)$. Dann heißt

$$n(\gamma; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

der Index bzw. die Windungszahl von γ bezüglich z_0.

Idee: $n(\gamma; z_0)$ zählt, wie oft γ den Punkt z_0 insgesamt umrundet, und zwar positiv (gegen Uhrzeigersinn) bzw. negativ (im Uhrzeigersinn).

Mit der Windungszahl kann man folgende wichtige Aussagen zeigen:

Satz 14.26 (Cauchysche Integralformeln)

Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}(D)$ und γ stückweise glatt, geschlossen und nullhomotop (stetig zu einer konstanten Kurve deformierbar). Dann gilt für $z_0 \notin \gamma$

$$n(\gamma; z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

und allgemeiner

$$n(\gamma; z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Für kreisförmige Kurven dürfte der Beweis klar sein.

Definition 14.27

Sei U offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sagen wir, dass f in z_0 eine isolierte Singularität besitzt.

Proposition 14.28

Besitzt die Funktion f an der Stelle z_0 eine isolierte Singularität, so gibt es $r > 0$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für } 0 < |z - z_0| < r. \tag{14.4}$$

Definition 14.29

Die Reihe (14.4) heißt Laurent-Reihe und man spricht von der Laurent-Entwicklung einer Funktion um z_0.

Definition 14.30

Isolierte Singularitäten einer holomorphen Funktion f werden folgendermaßen unterschieden:

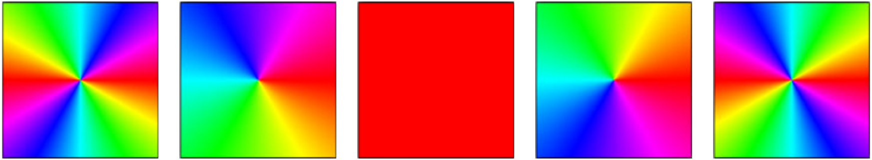
- **a** Lässt sich f stetig nach z_0 fortsetzen, so spricht man von einer hebbaren Singularität.
- **b** Sind in der obigen Entwicklung $a_k = 0$ für $k < -m$ $(m \in \mathbb{N})$ und $a_{-m} \neq 0$, so spricht man von einem Pol der Ordnung m.
- **c** In allen anderen Fällen spricht man von einer wesentlichen Singularität.

Die Zahl

$$a_{-1} =: \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

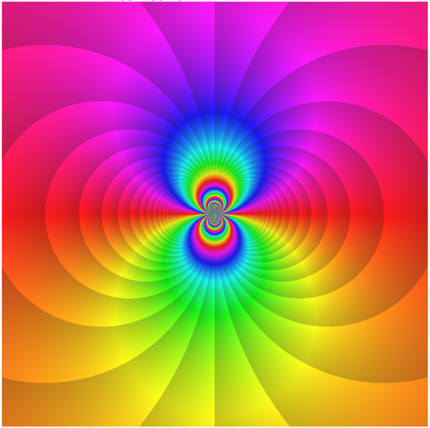
nennt man das Residuum (engl. residue) der Funktion f an der Stelle z_0.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ besitzt an der Stelle $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.



Phasenportrait von Polen und Nullstellen verschiedener Ordnungen: von links: $z^{-2}, z^{-1}, z^0, z, z^2$ in der Nähe von $z = 0$..

- Anhand ihres Phasenportraits kann man Pole und Nullstellen holomorpher Funktionen unterscheiden.
- Um Nullstellen der Ordnung k wird der Phasenkreis k Mal durchlaufen.
- Um Pole der Ordnung k geschieht dies k mal in die entgegengesetzte Richtung.



Phasenportrait einer wesentlichen Singularität: die Funktion $f(z) = \exp(1/z)$ im Rechteck $|\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq 1$.

Residuen einer holomorphen Funktion mit isolierten Singularitäten drücken gewissermaßen die Abweichung von der Holomorphie in diesen Punkten aus. Es gilt der

Satz 14.31 (Residuensatz)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen sowie $z_1, \dots, z_n \in U$ paarweise verschieden und $f \in \mathscr{H}(U \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$. Sei ferner γ eine stückweise glatte, geschlossene und nullhomotope[a] Kurve in U. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma; z_k) \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

[a] Dies bedeutet, dass die Kurve sich stetig zu einem Punkt deformieren lässt.

Lemma 14.32

Die Funktion f besitze einen Pol der Ordnung m in z_0, d.h.

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$$

mit g holomorph in einer Umgebung von z_0, $g(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Wichtiger Spezialfall: $m = 1$, also

$$f(z) = (z - z_0)^{-1} g(z) \quad \text{mit} \quad g \in \mathscr{H}(U \setminus \{z_0\}).$$

In diesem Fall ist

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = g(z_0),$$

was sofort aus der Cauchyschen Integralformel folgt.

Man zeige:

a. Für $a > 1$ gilt
$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

b.
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

c.
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Beim letzten Beispiel ist das Jordansche Lemma hilfreich: es besagt, dass

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{iaz}\,\mathrm{d}z \to 0 \quad \text{mit } R \to \infty,$$

wobei $\gamma_R : z(\vartheta) = R\,\mathrm{e}^{i\vartheta}, \vartheta \in [0, \pi]$, sofern $a > 0$, f komplexwertig, stetig und

$$M(R) := \max_{|z|=R} |f(z)| \to 0, \qquad R \to \infty.$$