# Mathematik IV
## (für IF, ET, Ph)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

**Studiengänge:** B Informatik, B Angewandte Informatik, B Elektrotechnik und Informationstechnik, B Regenerative Energietechnik, B Elektromobilität, B Physik, B Computational Science

Mathematik!
TU Chemnitz

# Inhalt I

# Inhalt

- Kapitel 9: Differentialrechnung für Skalarfelder und Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R} \qquad\qquad \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

mit $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^m$.

- Gradient und Ableitung eines differenzierbaren Skalarfeldes

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}, \qquad f'(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right] = \nabla f(\boldsymbol{x})^\top.$$

# Vektoranalysis

## Erinnerung

- Ableitung, Funktional- oder Jacobi-Matrix eines differenzierbaren Vektorfeldes

$$
\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{x})^\top \\ \nabla f_2(\boldsymbol{x})^\top \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{x})^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}
$$

- Hesse-Matrix eines zweimal partiell differenzierbaren Skalarfeldes:

$$
H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}
$$

- Kapitel 10: Kurvenintegral eines Skalarfeldes längs Kurve $\boldsymbol{\gamma} : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f \; \mathrm{d}s = \int_{t_a}^{t_e} f(\boldsymbol{\gamma}(t)) \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \; \mathrm{d}t$$

  oder eines Vektorfeldes

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \; \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{t_a}^{t_e} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) \; \mathrm{d}t$$

- Vektorfelder der Form $\boldsymbol{F} = \nabla V$ heißen Potentialfelder, für sie gilt

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \; \mathrm{d}\boldsymbol{x} = V(\boldsymbol{\gamma}(t_e)) - V(\boldsymbol{\gamma}(t_a)).$$

- Oberflächenintegral eines Skalarfeldes über eine Fläche $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^3$

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}} f(\boldsymbol{x}) \; \mathrm{d}O = \int_D f(\boldsymbol{\Phi}(u, v)) \|\boldsymbol{t}_u(u, v) \times \boldsymbol{t}_v(u, v)\| \; \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

# Inhalt

## Definition 13.1 (Laplace-Operator)

Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ ein zweimal stetig partiell differenzierbares Skalarfeld. Dann wird durch die Vorschrift

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

ein neues Skalarfeld $\Delta f : D \to \mathbb{R}$ definiert. Der so definierte Differentialoperator $\Delta$ heißt Laplace-Operator.

## Definition 13.2 (Divergenz eines Vektorfeldes)

Sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Der Differentialoperator $\operatorname{div}$ ordnet durch die Vorschrift

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

dem Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ das Skalarfeld $\operatorname{div} \boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}$ zu, welches als Divergenz des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ bezeichnet wird.

## Definition 13.3 (Rotation eines Vektorfeldes)

Sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \supset D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Der Differentialoperator $\operatorname{rot}$ (engl. $\operatorname{curl}$) ordnet durch die Vorschrift

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

dem Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ das Vektorfeld $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$ zu, welches als Rotation (oder Wirbelfeld) des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ bezeichnet wird.

Bestimmen Sie für das zentrale Kraftfeld

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) := \frac{k}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}, \qquad k < 0, \quad \boldsymbol{x} \in D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\},$$

Divergenz und Rotation. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Potentialfeld?

- Wir hatten bereits im Zusammenhang mit dem Gradienten-Operator den symbolischen Nabla-Vektor
$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$
eingeführt, sodass man $\nabla f$ formal als Anwendung (Multiplikation) von $\nabla$ von links auf das Skalarfeld $f$ erhält.
- Analog ergibt sich die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ als formales Skalarprodukt
$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$
- Auch die Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ lässt sich durch eine formale Operation mit $\nabla$ ausdrücken als
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}.$$

Die Differentialoperatoren $\operatorname{grad}$, $\operatorname{div}$ und $\operatorname{rot}$ treten auf, wenn bei Anwendung grundlegender Prinzipien der mathematischen Physik Differentialgleichungen hergeleitet werden, die Grundgrößen aus physikalischen Vorgängen in Beziehung setzen. Beispiele sind

- Die Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungsmechanik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \nabla p - \nabla \cdot (\nu \nabla \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{f} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned}$$

- Die Maxwell-Gleichungen elektromagnetischer Felder:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \end{aligned}$$

- Wird der Laplace-Operator auf Vektorfelder angewandt, so ist dies komponentenweise zu verstehen:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{bmatrix}$$

- Wird der Gradient-Operator auf ein Vektorfeld $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ angewandt, so resultiert die Transponierte der Jacobi-Matrix (vgl. Satz 9.23):

$$\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

  Insbesondere ergibt der Gradient (oder die Jacobi-Matrix) des Gradienten eines zweimal stetig differenzierbaren Skalarfeldes $\phi$ dessen Hesse-Matrix.

  Somit gilt auch $\Delta \phi = \operatorname{Spur} \nabla(\nabla \phi)$.

- Die Anwendung des Operators $(\boldsymbol{w} \cdot \nabla)$ mit einem Vektorfeld $\boldsymbol{w}$ auf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ ist ebenfalls komponentenweise zu lesen.

## Satz 13.4 (Rechenregeln für Operatoren der Vektoranalysis)

*Sei* $\phi : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ *ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld sowie* $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ *ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gelten*

- i $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \mathbf{0}$.
- ii $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = 0$.
- iii $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \Delta\phi$.
- iv $\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot (\operatorname{grad} \phi) + \phi(\operatorname{div} \boldsymbol{v})$.
- v $\operatorname{rot}(\phi\boldsymbol{v}) = (\operatorname{grad} \phi) \times \boldsymbol{v} + \phi(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})$.
- vi $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) - \Delta\boldsymbol{v}$.

*Die Regeln, in denen der Rotationsoperator auftritt, gelten nur für* $n = 3$.

# Inhalt

## Definition 13.5 (doppelpunktfreie Kurve)

Eine Kurve $\boldsymbol{\gamma} : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, wenn

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(t_1) &\neq \boldsymbol{\gamma}(t_2) \qquad \text{für } t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in (t_a, t_e), \\ \text{und } \boldsymbol{\gamma}(t) &\neq \boldsymbol{\gamma}(t_a) \qquad \text{für } t \in (t_a, t_e). \end{aligned}$$

## Definition 13.6 (zusammenhängende Menge, konvexe Menge, Gebiet)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ so durch einen Polygonzug verbunden werden können, dass alle Punkte des Polygonzuges zu $M$ gehören.
$M$ heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ die Verbindungsstrecke $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] := \{\boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) : \alpha \in [0, 1]\}$ ganz in $M$ liegt.
Eine offene und zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

## Definition 13.7 (einfachzusammenhängendes Gebiet)

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, wenn jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in $D$ stetig auf einen Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ zusammengezogen werden kann.

Anschaulich: Ein einfach zusammenhängendes Gebiet darf keine „Löcher“ haben. Eine Kugel ist einfachzusammenhängend. Ein Kreisring oder Torus dagegen nicht.

Kriterien für die Existenz von Potentialen hatten wir bereits in Abschnitt 10.2. aufgestellt. Mit Hilfe der zuletzt eingeführten Differentialoperatoren lassen sich diese kompakter beschreiben.

## Satz 13.8 (Existentz von Potentialen)

*Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ($n \geq 2$) und $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist $\boldsymbol{v}$ genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in D$ symmetrisch ist, d.h.*

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})]^\top.$$

*Die Forderung nach der Symmetrie der Jacobi-Matrix nennt man auch Integrabilitätsbedingung.*
*Für den Fall $n = 3$ ist die Symmetrie der Jacobi-Matrix gleichbedeutend mit der Gleichung*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

In Satz 10.16 hatten wir diese Aussage auf den Spezialfall des einfach zusammenhängende Gebiet $D = \mathbb{R}^n$ beschränkt.

## Definition 13.9

Sei $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w},$$

so heißt $\boldsymbol{w}$ Vektorpotential von $\boldsymbol{v}$.

## Satz 13.10 (Existenz eines Vektorpotentials)

*Sei $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, ein differenzierbares Vektorfeld. Ist $D$ eine offene konvexe Menge, so ist die Bedingung*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

*notwendig und hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials $\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w}$. Statt der Forderung der Konvexität von $D$ reicht hier auch die schwächere Forderung, dass $D$ einfach zusammenhängend ist.*

Analogie zu Skalarpotentialen: Ist $\boldsymbol{w}_0$ Vektorpotential von $\boldsymbol{v}$ (d.h. $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w}_0$) und ist $\boldsymbol{w}_1$ ein (beliebiges) Potentialfeld (d.h. $\operatorname{rot} \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}$), so folgt für $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_1$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w}_0 + \operatorname{rot} \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v},$$

d.h. auch $\boldsymbol{w}$ ist Vektorpotential von $\boldsymbol{v}$.

**Fazit:** Vektorpotentiale sind nur bis auf Potentialfelder eindeutig bestimmt.

# Inhalt

Wir behandeln nun eine Reihe von Sätzen, welche den Hauptsatz der Integralrechnung auf mehrdimensionale Mengen ausdehnen.

## Definition 13.11 (Positive Orientierung)

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$, ein Bereich mit Rand $\partial B$, der aus endlich vielen geschlossenen Kurven $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \dots, \boldsymbol{\gamma}_k$ bestehe. Die Kurven seien parametrisiert, so dass für jede von ihnen eine Durchlaufrichtung definiert ist.
Der Rand von $B$ heißt positiv orientiert, wenn beim Durchlaufen jeder einzelnen Randkurve $\boldsymbol{\gamma}_j$ der Bereich $B$ zur Linken liegt.

Eine positive Orientierung einer Kurve bedeutet somit eine Umlaufrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn.

**Beispiele:**

1. Der Rand des Einheitskreises mit Parametrisierung

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   ist positiv orientiert.

2. Das Rechteck $B = [a, b] \times [c, d]$ mit $a < b$, $c < d$, besitzt die Randkurve $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3, \boldsymbol{\gamma}_4]$. Mit den Parametrisierungen

$$\boldsymbol{\gamma}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ c \end{bmatrix}, \quad t \in [a, b], \qquad \boldsymbol{\gamma}_2(t) = \begin{bmatrix} b \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [c, d],$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3(t) = \begin{bmatrix} b + a - t \\ d \end{bmatrix}, \quad t \in [a, b], \qquad \boldsymbol{\gamma}_4(t) = \begin{bmatrix} a \\ c + d - t \end{bmatrix}, \quad t \in [c, d],$$

   ergibt sich eine positive Orientierung.

## Satz 13.12 (Satz von Green)

*Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich mit positiv orientiertem Rand $\partial B$, der aus endlich vielen geschlossenen Kurven besteht, und sei $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_B \left[\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right] \mathrm{d}V \tag{13.1}$$

- Folgerung: in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D$ verschwindet das Arbeitsintegral eines rotationsfreien ebenen Vektorfeldes längs einer beliebigen in $D$ verlaufenden geschlossenen Kurve.
- Satz von Green gilt auch in nicht einfach zusammenhängenden Gebieten $D$ und für ebene Vektorfelder $\boldsymbol{v}$, deren Rotation nicht notwendig überall in $D$ verschwindet.
- Er gestattet die Umwandlung eines Flächen- in ein Linienintegral (und umgekehrt) unter relativ geringen Voraussetzungen an $\boldsymbol{v}$ und $D$.

- Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein einfach zusammenhängender Bereich mit geschlossener, positiv orientierter Randkurve

$$\partial B : \boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_a, t_b].$$

- Sei ferner $u : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
- Der äußere Einheitsnormalenvektor $\boldsymbol{n}(t)$ an die Kurve $\partial B$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|} \begin{bmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{bmatrix}.$$

- Dann gilt $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\gamma}' = \|\boldsymbol{\gamma}'\| \boldsymbol{e}_3$, somit bilden $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\gamma}'$ und $\boldsymbol{e}_3$ ein Rechtssystem.
- Mit

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix} \quad \text{gilt} \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u.$$

Aus dem Satz von Green folgt nun ...

$$\int_B \Delta u \, \mathrm{d}V = \int_{\partial B} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{t_a}^{t_b} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) \, \mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} \nabla u(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{n}(t) \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(t) \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}s.$$

Insbesondere verschwindet das Kurvenintegral wenn $\Delta u = 0$ überall in $B$.

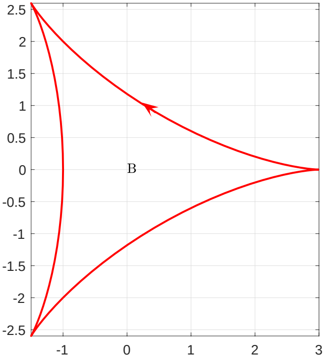
## Satz 13.13 (Flächeninhaltsformel)

*Sei $B$ ein Bereich, dessen Rand $\partial B$ durch eine doppelpunktfreie geschlossene, positiv orientierte Kurve $\boldsymbol{\gamma} = \partial B : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))^\top$, gegeben ist. Dann gilt für den Flächeninhalt $F(B)$ des Bereiches $B$ die Formel*

$$F(B) = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} [-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)] \, \mathrm{d}t. \tag{13.2}$$

Wir bestimmen die Fläche $F(B)$ des Innengebietes $B$ der Hypozykloidenkurve

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$




durch Anwendung des Satzes von Green auf $\boldsymbol{\gamma}$ und

$$\boldsymbol{v}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 1$$

und erhalten

$$F(B) = \int_B 1 \, \mathrm{d}V = \int_{\partial B} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[-8\cos^3 t + 6\cos t + 2\right] \, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

- In Abschnitt 10.3. hatten wir das Oberflächenintegral

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}O$$

eines stetigen Skalarfeldes $f : \boldsymbol{\Phi} \to \mathbb{R}$ eingeführt, welches auf einer (stückweise) regulären Fläche

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]^\top : B \to \mathbb{R}^3$$

mit Parameterbereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist.

- Das skalare Oberflächenelement $\mathrm{d}O$ war dabei definiert durch

$$\mathrm{d}O := \|\boldsymbol{t}_u(u,v) \times \boldsymbol{t}_v(u,v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

mit den Tangentenvektoren eines regulären Flächenstücks

$$\boldsymbol{t}_u(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{t}_v(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{bmatrix}.$$

- Mit Hilfe der Tangentenvektoren sind die metrischen Fundamentalgrößen des Flächenstücks $\boldsymbol{\Phi}$

$$\begin{aligned}E(u,v) &:= \boldsymbol{t}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{t}_u(u,v),\\ F(u,v) &:= \boldsymbol{t}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{t}_v(u,v),\\ G(u,v) &:= \boldsymbol{t}_v(u,v)\cdot\boldsymbol{t}_v(u,v)\end{aligned}$$

  definiert. Diese bestimmen die Länge von Kurven auf der Fläche und den Inhalt von Teilflächenstücken. Es gilt

$$\|\boldsymbol{t}_u(u,v)\times\boldsymbol{t}_v(u,v)\| = \sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}.$$

- Insbesondere konnten wir hiermit den Oberflächeninhalt von im Raum gelegenen Flächen sowie die Gesamtwirkung von Flächenbelegungen berechnen.

- Zur Motivation von Oberflächenintegralen von Vektorfeldern betrachte man eine strömende Flüssigkeit (Fluid) in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$.
- Von Interesse sei es, die pro Zeiteinheit durch eine in $D$ gelegene Fläche $S \subset D$ hindurchströmende Flüssigkeitsmasse.
- Konkret könnte dies die Ein- oder Austrittsöffnung einer Rohrleitung oder die Trennfläche zweier geologischer Schichten im Boden modellieren.
- Das Geschwindigkeitsfeld des Fluids sei durch das Vektorfeld $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$ gegeben, welches wir als zeitlich konstant (stationär) annehmen, dessen Dichte durch das Skalarfeld $\rho : D \to \mathbb{R}^+$.
- Bezeichnet $\Delta A \subset D$ ein (kleines) ebenes Flächenelement mit Flächeninhalt $F(\Delta A)$ und Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$, so ist der Massenstrom lokal an einem Punkt $\boldsymbol{x} \in \Delta A$ über ein Zeitintervall $\Delta t$ näherungsweise

$$\Delta m = \rho(\boldsymbol{x}) \;\; \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} \, F(\Delta A) \, \Delta t =: \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} \, F(\Delta A) \, \Delta t$$

mit der Massenstromdichte $\boldsymbol{j} := \rho \boldsymbol{v}$.

- Sei $S = \mathbf{\Phi}(B) \subset D$ ein reguläres Flächenstück mit Parametrisierung

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \mathbf{\Phi}(u, v), \quad (u, v) \in B \subset \mathbb{R}^2.$$

- Die (linear unabhängigen) Tangentenvektoren $\boldsymbol{t}_u(u, v)$ und $\boldsymbol{t}_v(u, v)$ spannen dann die Tangentialebene am (inneren) Punkt $\boldsymbol{x} = \mathbf{\Phi}(u, v) \in \mathring{S}$ auf.
- Als Einheitsnormalenvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u, v)$ im Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathring{S}$ wählen[1] wir

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{\boldsymbol{t}_u(u, v) \times \boldsymbol{t}_v(u, v)}{\|\boldsymbol{t}_u(u, v) \times \boldsymbol{t}_v(u, v)\|}, \qquad (u, v) \in \mathring{B}.$$

  Somit stellt $\boldsymbol{n} : \mathring{S} \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Feld von Einheitsnormalenvektoren dar.
- Ein reguläres Flächenstück, bei dem man an allen Punkten in derselben Weise eindeutig festgelegte Normalenvektoren definieren, also „Oberseite“ und „Unterseite“ unterscheiden kann, bezeichnen wir als zweiseitige Fläche. Von Unter- zu Oberseite gelangt man in Richtung von $\boldsymbol{n}$.

[1] Wir hätten genausogut $-\boldsymbol{n}$ als Normale wählen können.

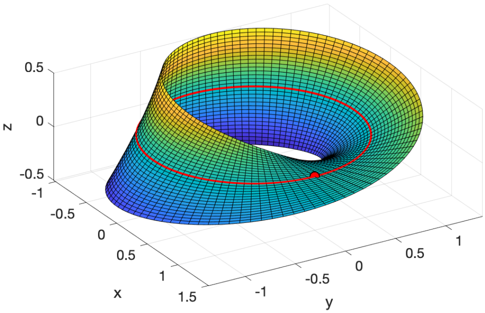
Ein klassisches Beispiel für eine nicht zweiseitige Fläche ist das Moebius-Band, parametrisiert durch

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi u) + v\cos(\pi u)\cos(2\pi u) \\ \sin(2\pi u) + v\cos(\pi u)\sin(2\pi u) \\ v\sin(\pi u) \end{bmatrix}, \quad (u,v) \in B := [0,1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Läuft man auf der Fläche längs der Kurve

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,0), \quad t \in [0,1],$$

so gilt $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\gamma}(1)$.
Für $(u,v) = (0,0)$ erhält man den Normalenvektor $\boldsymbol{n} = (0,0,-1)^\top$, am Endpunkt $(u,v) = (1,0)$ jedoch $\boldsymbol{n} = (0,0,1)^\top$.



- Wird eine zweiseitige Fläche von einem Fluid durchströmt, kann man die lokale Betrachtung in eine globale überführen und das lokale Flächenelement $\Delta A$ durch das (skalare) Oberflächenelement $\mathrm{d}O$ ersetzen.
- Ist die Funktion $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ für $\boldsymbol{x} \in S$ beschränkt sowie für $\boldsymbol{x} \in \mathring{S}$ stetig, so existiert das Oberflächenintegral

$$\dot{m} := \int_S f \,\mathrm{d}O := \int_{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}O.$$

- Mit $\dot{m}$ ist somit die pro Zeiteinheit durch $S$ in Richtung $\boldsymbol{n}$ strömende Flüssigkeitsmasse bezeichnet.
- Hierdurch motiviert führen wir an dieser Stelle noch das vektorielle Flächenelement wie folgt ein:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{O} := \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}O = \frac{\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v}{\|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\|} \|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = (\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v.$$

## Definition 13.14 (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes)

Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres (zweiseitiges) Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\boldsymbol{\Phi} : B \to S$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ das Feld der Normalen von $S$ und $\boldsymbol{v} : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann nennt man

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O} := \int_{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}O \tag{13.3}$$

das Oberflächenintegral oder Flussintegral des stetigen Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ über $S$ bzw. den Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ durch $S$ in Richtung $\boldsymbol{n}$.

## Definition 13.15 (Zirkulation)

Sei $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, und $\boldsymbol{\gamma}$ eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in $D$. Das Kurvenintegral

$$Z := \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

nennt man die Zirkulation von $\boldsymbol{v}$ längs der Kurve $\gamma$.

## Definition 13.16 (Zirkulation pro Fläche)

Es sei $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $\boldsymbol{x}_0$ sei ein Punkt in $D$, $\boldsymbol{n}$ ein von $\boldsymbol{x}_0$ ausgehender Richtungsvektor ($\|\boldsymbol{n}\| = 1$). Der Grenzwert

$$W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{\substack{\boldsymbol{x}_0 \in A \\ |A| \to 0}} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{13.4}$$

heißt Zirkulation pro Flächeneinheit des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ bezüglich der Richtung $\boldsymbol{n}$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0$.

## Satz 13.17 (Zirkulation und Wirbelfeld)

*Sei* $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ *offen, ein stetig differenzierbares Vektorfeld,* $\boldsymbol{x}_0$ *sei ein Punkt aus* $D$, $\boldsymbol{n}$ *ein beliebiger Einheitsvektor. Die Zirkulation pro Flächeneinheit* $W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_0)$ *von* $\boldsymbol{v}$ *bezüglich der Richtung* $\boldsymbol{n}$ *stimmt überein mit der Komponente in Richtung* $\boldsymbol{n}$ *des Wirbelfeldes* $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0)$, *d.h.*

$$W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0).$$

### Satz 13.18 (Stokesscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$)

*Es sei* $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld,* $D \subset \mathbb{R}^3$*, offen, und* $S$ *ein reguläres Flächenstück in* $D$*.* $S$ *sei von einer geschlossenen regulären, orientierten Kurve* $\partial S$ *berandet. Dann gilt*

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O}. \tag{13.5}$$

*Die Richtung der in* $\mathrm{d}\boldsymbol{O} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}O$ *enthaltenen Flächennormalen ergibt sich aus der Orientierung der Randkurve durch eine Rechtsschraube.*

- Der Stokessche Integralsatz besagt, dass die Zirkulation entlang einer Kurve, die ein Flächenstück berandet, gleich dem Integral über die Normalkomponente des Wirbelfeldes $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, d.h. gleich dem Fluss von $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ durch das Flächenstück ist.

- Ist im Stokesschen Integralsatz $S$ ein einfach zusammenhängendes, ebenes Flächenstück in der $x/y$-Ebene mit Normalen $\boldsymbol{n} = (0,0,1)^\top$ und positiv orientierter geschlossener Randkurve $\partial S$ und betrachtet man ebene Vektorfelder
$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in S,$$
so erhält man den Satz von Green für einfach zusammenhängende Gebiete.
- Betrachtet man ein in $D$ definiertes Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ und zwei in $D$ liegende Flächenstücke $S_1, S_2$ mit demselben orientierten Rand $\partial S$, so stimmen nach Satz 13.18 die Flussintegrale von $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ über $S_1$ und $S_2$ überein. Solange die Randkurve $\partial S$ in $D$ unverändert bleibt, kann man $S$ in $D$ „beliebig" verformen, ohne den Fluss von $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ durch $S$ zu ändern.

## Folgerung 13.19 (Stokesscher Satz, Flächen mit gleicher Randkurve)

*Es sei* $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld,* $D \subset \mathbb{R}^3$ *offen, und* $S_1$ *und* $S_2$ *reguläre Flächenstücke in* $D$*, welche als Randkurve dieselbe geschlossene reguläre und orientierte Kurve* $\partial S$ *besitzen. Dann gilt*

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O}$$

*mit denselben Festlegungen bezüglich Orientierung der Normalen* $\boldsymbol{n}$ *wie in Satz 13.18.*

## Satz 13.20 (Gaußscher Integralsatz)

*Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer Bereich mit äußerer Normalen $\boldsymbol{n}$ in den Punkten seines Randes $\partial B$. Ist $\boldsymbol{v}$ ein im Gebiet $D \supset B$ stetig differenzierbares Vektorfeld, so gilt*

$$\int_B \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \int_{\partial B} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \int_{\partial B} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}O. \tag{13.6}$$

1. Berechnen Sie den nach außen gerichtete Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (x^2yz, xy^2z, -2xyz^2)^\top$ durch die Oberfläche der Kugel $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.
2. Durch den Kegelstumpf $Z = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le (2-z)^2, z \in [0,1]\}$ ströme in $z$-Richtung ein inkompressibles Fluid. Dabei sei die Wandfläche $Z_w = \{(x,y,z) \in Z : x^2 + y^2 = (2-z)^2\}$ undurchlässig und der Fluss durch die Eintrittsfläche $Z_0 = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \le 4\}$ mit Außennormalen $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_3$ gegeben durch $F = -8\pi$. Ermitteln Sie die mittlere Austrittsgeschwindigkeit durch $Z_1 = \{(x,y,1) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes 13.20 auf das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \phi \operatorname{grad} f$ für zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder $\phi$ und $f$ folgen unter Beachtung der Beziehung

$$\operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} f) = \phi \Delta f + \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} f$$

unmittelbar

## Folgerung 13.21

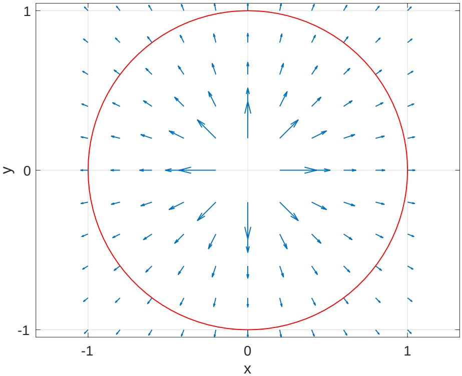
*Sei $B$ ein regulärer Bereich, $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale längs $\partial B$ und $f$ und $\phi$ zwei auf $D \supset B$ definierte zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gelten*

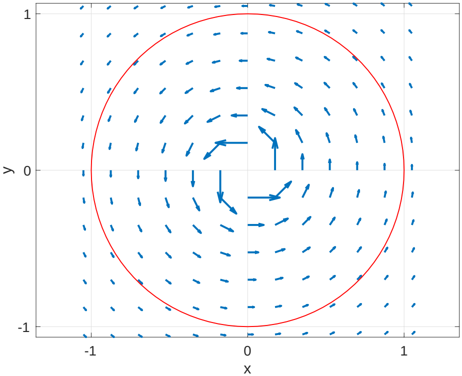
$$\int_{\partial B} \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}O = \int_B [\phi \Delta f + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} \phi] \, \mathrm{d}V \qquad \text{(1. Greensche Formel)}$$

*sowie*

$$\int_{\partial B} \left[ \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} - f \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}O = \int_B [\phi \Delta f - f \Delta \phi] \, \mathrm{d}V \qquad \text{(2. Greensche Formel).}$$

## Beispiele divergenzfreier ebener Vektorfelder




$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$

## Satz 13.22 (Gaußscher Integralsatz in der Ebene)

*Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich mit geschlossener, stückweise glatter, positiv orientierter Randkurve $\partial D$, $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, und einfach zusammenhängendem Inneren $\mathring{D} = D \setminus \partial D$. In einem Gebiet $D' \supset D$, $D' \subset \mathbb{R}^2$, sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^\top : D \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann gilt*

$$\oint_{\partial D} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = \int_a^b [v_1(\boldsymbol{\gamma}(t))\gamma_2'(t) - v_2(\boldsymbol{\gamma}(t))\gamma_1'(t)]\,\mathrm{d}t = \int_D \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}F.$$

*Dabei ist $\boldsymbol{n}$ die bezüglich $D$ äußere Normale von $\partial D$. In Analogie zum Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche nennt man das Kurvenintegral von $\boldsymbol{v}$ durch die Randkurve $\partial D$ von $D$.*

Setzt man nun $w_1 = v_2$, $w_2 = -v_1$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, so folgt aus dem Gaussschen Integralsatz in der Ebene nach Multiplikation mit $(-1)$ der

## Satz 13.23 (Stokesscher Integralsatz in der Ebene)

*Mit den Bezeichnungen aus Satz 13.22 gilt*

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_a^b [w_1(\boldsymbol{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + w_2(\boldsymbol{\gamma}(t))\gamma_2'(t)] \, \mathrm{d}t = \int_D \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Entsprechend der Definition 13.15 ist das Kurvenintegral auf der linken Seite die Zirkulation von $\boldsymbol{w}$ längs $\partial D$. In ähnlicher Weise kann man die 1. Greensche Integralformel auf den ebenen Fall spezialisieren. Man erhält

## Folgerung 13.24 (1. Greensche Formel in der Ebene)

$$\int_{\partial D} \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}s = \int_D [\phi \Delta f + \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} f] \, \mathrm{d}F.$$