TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 7. Januar 2019
Prof. Dr. Oliver Ernst
PD Dr. Ronny Bergmann, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz
Dipl.-Math. Michael Quellmalz, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2018/19

9. Übung: Algebraische Strukturen

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ mit der Operation $a \circ b := a + b - ab$ eine Halbgruppe ist. Gibt es ein neutrales Element? Falls ja, welche Elemente besitzen Inverse?

Aufgabe 2

Welche der folgenden Beispiele sind Gruppen? Dabei bezeichnen $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

a) $(G, +)$ mit $G = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$,

b) $(G, \cdot)$ mit $G = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$,

c) $(G, +)$ mit $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$,

d) $(G, \cdot)$ mit $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Untergruppen der folgenden zyklischen Gruppe

$$G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}.$$

Welche dieser Untergruppen ist ein Normalteiler von G?

Aufgabe 4

Geben sei die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

sowie folgende Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$$\begin{aligned}
(a + b\sqrt{5}) \oplus (c + d\sqrt{5}) &:= (a + c) + (b + d)\sqrt{5}, \\
(a + b\sqrt{5}) \odot (c + d\sqrt{5}) &:= (a \cdot c + 5 \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), \oplus, \odot)$ ein Körper ist.

Hinweis: Erinnert Sie die Definition der Operationen auf $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ an etwas? Z.B. an die Operationen auf einer ähnlich definierten Menge mit reellen Koeffizienten a, b aus Mathematik I?

Aufgabe 5

(a) Es sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Untersuchen Sie die Relationen $\subseteq$ und $\not\subseteq$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

(b) Es sei $M = \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff (a, b) = (c, d) \text{ oder } (a, b) = (d, c)$$

eine Äquivalenzrelation auf $M \times M$ ist. In wie viele Äquivalenzklassen teilt R die Menge $M \times M$?

Aufgabe 6

Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln für $\mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_6$ auf.

Verifizieren Sie mittels dieser Tabellen, dass $(\mathbb{Z}_3, +)$, $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \cdot)$ sowie $(\mathbb{Z}_6, +)$ Gruppen sind, $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ allerdings keine Gruppe ist.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die folgenden additiven Inversen

a) zu 1 in $\mathbb{Z}_{20}$, b) zu 4 in $\mathbb{Z}_{12}$, c) zu 199 in $\mathbb{Z}_{200}$,

sowie die folgenden multiplikativen Inversen

d) zu 2 in $\mathbb{Z}_7$, e) zu 7 in $\mathbb{Z}_{23}$, f) zu 10 in $\mathbb{Z}_{51}$.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Inversen in der Gruppe $(\mathbb{Z}_{457}, \cdot)$ zu

a) 12, b) 200, c) 400

mittels des euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 9

In welchen endlichen Körper gilt *"25 divided by 5 is 14"* ?

Tipp: Googeln Sie mal nach dieser englischen Aussage und genießen Sie das Video.