TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
PD Dr. Ronny Bergmann, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz
Dipl.-Math. Michael Quellmalz, Dipl.-Math. Christian Rebs

5. Dezember 2018

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2018/19

7. Übung: Kurven- und Oberflächenintegrale

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie eine Flugbahnkurve vom Nord- zum Südpol, bei der Sie die Erde einmal umrunden. An welcher Stelle ist das skalare Wegelement bzw. die Ableitung der Bahnkurve maximal?

Hinweis: Wir nehmen den Erdradius mit 6400km an und den Erdmittelpunkt als $(0,0,0)^\top$.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \pi\cos 2t \\ \pi \sin 2t \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x)$.

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve mit Parametrisierung

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} a\cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Hierbei ist $a > 0$ zu wählen. (Anm.: Es handelt sich um den Viertelbogen einer Astroide.)

(b) Berechnen Sie das Integral der Funktion $\boldsymbol{F}(x,y) = [0,y]^T$ längs des Astroidenbogens aus Aufgabe (a) auf direktem Wege.

(c) Bestätigen Sie mit der Integrabilitätsbedingung, dass es sich bei $\boldsymbol{F}$ um ein Potentialfeld handelt und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential (d. h. eine Stammfunktion).

(d) Bestimmen Sie das Integral aus Teil (b) mit diesen Erkenntnissen erneut.

(e) Was ist der Wert des entsprechenden Arbeitsintegrals $\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}$ längs der geradlinigen Verbindung vom Anfangs- zum Endpunkt des Astroidenbogens?

Aufgabe 3

Man berechne das Arbeitsintegral über $\boldsymbol{F}(x,y) = [xy^2, x^2-y^2]^\top$ entlang des Weges $y^2 = 3x$ von $(0,0)$ nach $(3,3)$ sowie entlang des Streckenzugs von $(0,0) \to (3,0) \to (3,3)$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Vektorfelder, ob diese Potentialfelder sind und geben Sie ggf. die Potentialfunktion an:

(a) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [1, 1, 1]^\top$, (b) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [2x, 2y, 0]^\top$, (c) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [yz, xz, x^2]^\top$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel mit Radius $r > 0$.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass das Paraboloid

$$P = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = z; x, y \in [-1, 1]\}$$

und das Hyperboloid

$$H = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2y^2 = z; x, y \in [-1, 1]\}$$

den gleichen Oberflächeninhalt besitzen.