TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 8. November 2018
Prof. Dr. Oliver Ernst
PD Dr. Ronny Bergmann, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz
Dipl.-Math. Michael Quellmalz, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2018/19

4. Übung: Totales Differential und vektorwertige Funktionen

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen das totale Differential:

(a) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, (b) $f(x,y,z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$.

Aufgabe 2

In einem Experiment wird aus einer Messung von Spannung U und Stromstärke I ein Widerstand mit dem Ohmschen Gesetz $R = \frac{U}{I}$ berechnet. Wie hängt der relative Fehler des Widerstands mit den relativen Fehlern von Spannung und Stromstärke zusammen?

Aufgabe 3

Gegeben sei die *Cobb-Douglas Produktionsfunktion*

$$y(p_1, p_2) = 9p_1^{2/3} p_2^{1/3}.$$

Schätzen Sie mit Hilfe des totalen Differentials die Änderung des Produktionswertes, wenn man $p_1 = 27$ um eine Einheit verringert und $p_2 = 8$ um zwei Einheiten vergrößert, nach oben ab. Vergleichen Sie den Wert mit dem exakten Änderungswert.

Aufgabe 4

Von einem geraden Kegelstumpf hat man die Radien der Grundkreise mit $r_1 = (30 \pm 1)\, mm, \quad r_2 = (60 \pm 1)\, mm$ sowie die Höhe mit $h = (50 \pm 0,2)\, mm$ gemessen.
Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei der Berechnung des Kegelstumpfvolumens nach der Formel

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Aufgabe 5

Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines geraden Kreiszylinders fehlerhaft sein, wenn der Radius mit $1/3\,\%$ und die Höhe mit $1/2\,\%$ fehlerhaft gemessen werden?

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Ableitungen (Jacobi-Matrizen) folgender Funktionen:

(a) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix} y^2 \\ ze^{3xy} \end{bmatrix}$,

(b) $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{g}(x,y) = \begin{bmatrix} x\sin y \\ y \sin x \\ \sin x \cos y \end{bmatrix},$

(c) $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{h}(r,\phi) = \begin{bmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{bmatrix},$

(d) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}.$

Haben Sie eine Vorstellung, was die Funktion γ in (d) beschreibt?

Aufgabe 7

Gegeben seien

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ t^3 \end{bmatrix}, \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Komposition $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h := f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 8

Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ definiert. Schränkt man die Werte von x und y auf

$$(x,y) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

ein, erhält man eine Kurve auf dieser Fläche. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ mit Hilfe der Kettenregel. An welchen Stellen verläuft die Kurve horizontal, d.h., parallel zur x-y-Ebene?