TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 25. Oktober 2018
Prof. Dr. Oliver Ernst
PD Dr. Ronny Bergmann, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz
Dipl.-Math. Michael Quellmalz, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2018/19

3. Übung: Differentialrechnung in mehreren Variablen

Aufgabe 1

Ermitteln Sie jeweils sämtliche ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(a) $f(x,y) = 4 + x^3 + 3x^2y^3 + y^3$, (b) $f(x,y) = x\sin(2x+y)$, (c) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$,
(d) $f(x,y) = x^y$, (e) $f(x,y) = xe^{y/x}$, (f) $f(x,y) = x^2 + e^x y + e^y x^2 - 3x\ln y$.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2x^2 + y^2$.

(a) Zeichnen Sie eine Karte (Höhenlinienbild) der Funktion.

(b) Vergewissern Sie sich, dass der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^\top$ auf dem Graphen von f liegt.

(c) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ den Gradienten und die Gleichung der Tangentialebene.

(d) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ die Ableitung in Richtung $a = (1,0)^\top$. In welcher Richtung besitzt die Tangentialebene den steilsten Anstieg, und wie kann man diesen berechnen?

(e) Finden Sie einen Richtungsvektor, dessen Richtungsableitung in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ genau $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ist.

Aufgabe 3

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 4|y - 2z|.$$

(a) Für welche Richtungen $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ besitzt f in $(0,0,0)^\top$ eine Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(0,0,0)$?

(b) Was können Sie daraus bzgl. der partiellen und totalen Differenzierbarkeit von$f$ in $(0,0,0)^\top$ schlußfolgern?

(c) Was ändert sich bzgl. der Differenzierbarkeit in $(0,0,0)^\top$, wenn wir die Funktion leicht abändern zu

$$g(x,y,z) = 3x^2 \cdot |y - 2z|?$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

(a) $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$

(b) $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^\alpha$ für $\alpha > 0$

(c) $f(\boldsymbol{x}) = \ln \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$

mit $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und einem festen $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5

Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl c. Zeigen Sie dass

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,t) := f(x + ct) + g(x - ct)$$

die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.