TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 5. Oktober 2018
Prof. Dr. Oliver Ernst
PD Dr. Ronny Bergmann, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz
Dipl.-Math. Michael Quellmalz, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2018/19

2. Übung: Vektorfolgen und Stetigkeit

Aufgabe 1

Konvergieren die gegebenen Vektorfolgen für $n \to \infty$? Wenn ja, wie lautet jeweils der Grenzwert?

$$\boldsymbol{a}^{(n)} = \left(\frac{1}{n!}, \sqrt{n^2-1} - n\right)^\top, \qquad \boldsymbol{b}^{(n)} = \left(2^n, \frac{1}{n}, 1\right)^\top,$$
$$\boldsymbol{c}^{(n)} = \left(\frac{\sin(n)}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\top, \qquad \boldsymbol{d}^{(n)} = \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+5}{n-1}\right)^\top.$$

Aufgabe 2

Gegeben ist eine Folge von Vektoren $\boldsymbol{d}^{(n)} \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$\boldsymbol{d}^{(n+2)} = \boldsymbol{d}^{(n+1)} \times \boldsymbol{d}^{(n)}, \quad \boldsymbol{d}^{(1)} = e_1, \quad \boldsymbol{d}^{(2)} = e_2.$$

(a) Konvergiert diese für $n \to \infty$?

(b) Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn man $\boldsymbol{d}^{(2)} = 0.5e_2$ setzt?

Aufgabe 3

Wir betrachten die Vektorfolge

$$\boldsymbol{a}^{(n+1)} = P\boldsymbol{a}^{(n)}, \quad \boldsymbol{a}^{(1)} = (-1,1)^\top, \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von P und geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren an.

(b) Stellen Sie $\boldsymbol{a}^{(1)}$ bzgl. dieser Basis dar.

(c) Was bewirkt eine Multiplikation von $\boldsymbol{a}^{(1)}$ mit P? Was bedeutet das für die Konvergenz und den Grenzwert der Vektorfolge?

(d) Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn $\boldsymbol{a}^{(1)} = (1,2)^\top$ gewählt wird?

Aufgabe 4

Veranschaulichen Sie die folgenden Funktionen:

$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2, \qquad g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Welche Form haben die Höhenlinien? Geben Sie zusätzlich jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie den maximalen Wertebereich an.

Aufgabe 5

Wir betrachten Funktionen

a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, b) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

Zeigen Sie jeweils, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

existieren, aber nicht

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{für} \quad x^4+y^2 > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x^4+y^2 = 0, \end{cases}$$

in $(0,0)$ stetig längs jeder Halbgeraden $\boldsymbol{x} = (t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)^T$, mit $t \geq 0,\ \alpha \in [0,2\pi)$ fest, ist, jedoch bezüglich ihres ganzen Definitionsbereiches in $(0,0)$ nicht stetig sein kann.