

**Mathematik III (für Informatiker)**  
Wintersemester 2016/17

8. Übung: Algebraische Strukturen

**Aufgabe 1**

Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{Z}, \circ)$  mit der Operation  $a \circ b := a + b - ab$  eine Halbgruppe ist. Gibt es ein neutrales Element? Falls ja, welche Elemente besitzen Inverse?

**Aufgabe 2**

Welche der folgenden Beispiele sind Gruppen? Dabei bezeichnen  $+$  und  $\cdot$  die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

- a)  $(G, +)$  mit  $G = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,
- b)  $(G, \cdot)$  mit  $G = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,
- c)  $(G, +)$  mit  $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,
- d)  $(G, \cdot)$  mit  $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Aufgabe 3**

Bestimmen Sie alle Untergruppen der folgenden zyklischen Gruppe

$$G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}.$$

Welche dieser Untergruppen ist ein Normalteiler von  $G$ ?

**Aufgabe 4**

Geben sei die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

sowie folgende Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$$(a + b\sqrt{5}) \oplus (c + d\sqrt{5}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{5},$$

$$(a + b\sqrt{5}) \odot (c + d\sqrt{5}) := (a \cdot c + 5 \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\sqrt{5}.$$

Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), \oplus, \odot)$  ein Körper ist.

*Hinweis:* Erinnert Sie die Definition der Operationen auf  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  an etwas? Z.B. an die Operationen auf einer ähnlich definierten Menge mit reellen Koeffizienten  $a, b$  aus Mathematik I?

**Aufgabe 5**

- (a) Es sei  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Untersuchen Sie die Relationen  $\subseteq$  und  $\not\subseteq$  auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

(b) Es sei  $M = \{1, 2, 3\}$ . Zeigen Sie, dass

$$(a, b) R (c, d) \iff (a, b) = (c, d) \text{ oder } (a, b) = (d, c)$$

eine Äquivalenzrelation auf  $M \times M$  ist. In wie viele Äquivalenzklassen teilt  $R$  die Menge  $M \times M$ ?

### **Aufgabe 6**

Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabellen für  $\mathbb{Z}_3$  und  $\mathbb{Z}_6$  auf.

Verifizieren Sie mittels dieser Tabellen, dass  $(\mathbb{Z}_3, +)$ ,  $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \cdot)$  sowie  $(\mathbb{Z}_6, +)$  Gruppen sind,  $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$  allerdings keine Gruppe ist.

### **Aufgabe 7**

Bestimmen Sie die folgenden additiven Inversen

a) zu 1 in  $\mathbb{Z}_{20}$ ,    b) zu 4 in  $\mathbb{Z}_{12}$ ,    c) zu 199 in  $\mathbb{Z}_{200}$ ,

sowie die folgenden multiplikativen Inversen

d) zu 2 in  $\mathbb{Z}_7$ ,    e) zu 7 in  $\mathbb{Z}_{23}$ ,    f) zu 10 in  $\mathbb{Z}_{51}$ .

### **Aufgabe 8**

Berechnen Sie die Inversen in der Gruppe  $(\mathbb{Z}_{457}, \cdot)$  zu

a) 12,    b) 200,    c) 400

mittels des euklidischen Algorithmus.

### **Aufgabe 9**

In welchen endlichen Körper gilt "25 divided by 5 is 14" ?

*Tipp:* Googeln Sie mal nach dieser englischen Aussage und genießen Sie das Video.