TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

12. Dezember 2016

Mathematik III (für Informatiker)

Wintersemester 2016/17

7. Übung: Fourier- und Laplacetransformation

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen. Es sei stets $a > 0$.

a) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ b) $f_2(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ c) $f_3(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) - y''(t) = \mathrm{e}^{-|t|}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe der Fouriertransformation. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Wenden Sie die Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung an und finden sie eine explizite Formel für die Fouriertransformierte $\hat{y}$ der Lösung y.

(b) Bestimmen Sie y aus $\hat{y}$ unter Verwendung des Faltungssatzes und den Ergebnissen der vorherigen Aufgaben.

Hinweis: Eine direkte Berechnung der inversen Fouriertransformation zur Bestimmung von y ist nicht notwendig.

Aufgabe 3

(a) Stellen Sie folgende Funktion mit Hilfe der Heaviside-Funktion ohne Fallunterscheidung dar und bestimmen Sie ihre Laplacetransformierte:

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t \leq 3, \\ 8-2t, & 3 \leq t \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $(t-a)H(t-a)$, $a > 0$.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ definiert und wie lautet sie?

Hinweis: Erinnern Sie sich an $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Was passiert mit der Laplace-Transformierten, wenn wir im Originalbereich eine positive Verschiebung um $a > 0$ haben? D.h., wie verhält sich $\mathcal{L}f(t+a)$ zu $\mathcal{L}f(t)$ für $a > 0$?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Lösung folgender Anfangswertprobleme mittels der Laplace-Transformation:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1,$ (b) $y'' + y' = \mathrm{e}^{-2t},\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$