TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

11. November 2016

Mathematik III (für Informatiker)

Wintersemester 2016/17

4. Übung: Implizite Funktionen und Extremwertaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Punkte, in denen sich die folgenden Gleichungen nach y auflösen lassen.

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$, (b) $y\mathrm{e}^y = x$, (c) $x^y = y^x$, $x, y > 0$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen $y = y(x)$ der durch $\mathrm{e}^{xy} - y + x = 1$ definierten Kurve in $\mathbb{R}^2$ im Punkt $x = 0$. Wie lautet die zweite Ableitung $y''(0)$?

Aufgabe 3

Berechnen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2xy + 8y^2 - 6x - 34y + \gamma$. Bestimmen Sie den reellen Parameter γ so, dass der Graph von f die Ebene $z = 7$ berührt. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts an.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 - \frac{1}{4}x^2$ keine lokalen Extrema besitzt.
(Hinweis: Man muss nicht die stationäen Punkte berechnen, um diese Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 + x^2 - \ln(x + y)$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie das maximale Produkt xyz dreier nichtnegativer Zahlen x, y und z, deren Summe gleich 105 ist.

Aufgabe 8

Ein Dosenhersteller will für seine zylindrischen Blechdosen bei einem vorgegebenen Blechverbrauch von $600\pi\,\mathrm{cm}^2$ ein möglichst großes Fassungsvermögen erreichen. Bestimmen Sie das maximale Volumen einer solchen Blechdose und die entsprechenden Abmessungen.

Hinweis: Die Oberfläche eines Zylinders der Höhe h und mit Radius r ist $2\pi r(r + h)$.