

Mathematik III (für Informatiker)

Wintersemester 2016/17

3. Übung: Totales Differential und vektorwertige Funktionen

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen das totale Differential:

$$(a) f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad (b) f(x, y, z) = xe^{x^2+y^2+z^2}.$$

Aufgabe 2

In einem Experiment wird aus einer Messung von Spannung U und Stromstärke I ein Widerstand mit dem Ohmschen Gesetz $R = \frac{U}{I}$ berechnet. Wie hängt der relative Fehler des Widerstands mit den relativen Fehlern von Spannung und Stromstärke zusammen?

Aufgabe 3

Gegeben sei die *Cobb-Douglas Produktionsfunktion*

$$y(p_1, p_2) = 9p_1^{2/3} p_2^{1/3}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des totalen Differentials approximativ die Änderung des Produktionswertes, wenn man $p_1 = 27$ um eine Einheit verringert und $p_2 = 8$ um zwei Einheiten vergrößert. Vergleichen Sie den Wert mit dem exakten Änderungswert.

Aufgabe 4

Von einem geraden Kegelstumpf hat man die Radien der Grundkreise mit $r_1 = (30 \pm 1) \text{ mm}$, $r_2 = (60 \pm 1) \text{ mm}$ sowie die Höhe mit $h = (50 \pm 0,2) \text{ mm}$ gemessen.

Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei der Berechnung des Kegelstumpfvolumens nach der Formel

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Aufgabe 5

Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines geraden Kreiszyinders fehlerhaft sein, wenn der Radius mit 1/3 % und die Höhe mit 1/2 % fehlerhaft gemessen werden?

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Ableitungen (Jacobi-Matrizen) folgender Funktionen:

$$(a) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = \begin{bmatrix} y^2 \\ ze^{3xy} \end{bmatrix},$$

$$(b) g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) = \begin{bmatrix} x \sin y \\ y \sin x \\ \sin x \cos y \end{bmatrix},$$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(r, \phi) = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{bmatrix}$,

(d) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$.

Haben Sie eine Vorstellung, was die Funktion γ in (d) beschreibt?

Aufgabe 7

Gegeben seien

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ t^3 \end{bmatrix}, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Komposition $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h := f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 8

Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche in \mathbb{R}^3 definiert. Schränkt man die Werte von x und y auf

$$(x, y) = (e^t, e^{-t}), \quad t \in \mathbb{R}$$

ein, erhält man eine Kurve auf dieser Fläche. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel. An welchen Stellen verläuft die Kurve horizontal, d.h., parallel zur x - y -Ebene?