TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst

Studiengang	
Matrikelnummer	Name, Vorname

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/ 7	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 5	/ 5	/ 35

Probeklausur Mathematik III (für Informatiker)

Wintersemester 2016/17

Hinweis zur Bearbeitung:
Sämtliche Aussagen müssen begründet werden. Auf Antworten ohne Angabe des Lösungswegs werden keine Punkte vergeben.

Aufgabe 1 *(2+5 Punkte)*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x\left(x^2 + y^2 - 9\right).$$

(a) Skizzieren Sie die Menge aller Punkte (x,y) mit $f(x,y) = 0$ in einem kartesischen Koordiantensystem. Kennzeichnen Sie anschließend die Gebiete für die $f(x,y) > 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema von f.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - x^2 + y^3$$

die Normalform der Tangentialebene im Punkt $(0,-1)$ und deren Anstieg in Richtung $\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}(4,3)^\top$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Zwei Widerstände werden mit $R_1 = (10 \pm 0.1)\Omega$ und $R_2 = (15 \pm 0.1)\Omega$ gemessen. Schätzen Sie mit Hilfe des totalen Differentials den absoluten und relativen Fehler bei der Berechnung des Gesamtwiderstandes in Parallelschaltung nach der Formel

$$R_G = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Aufgabe 4 *(3+1 Punkte)*

Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ und eine Kurve γ durch

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ xy \end{bmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le 2.$$

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

(b) Ist $\boldsymbol{F}$ ein Potentialfeld? Begründen Sie Ihre Antwort und gegeben Sie ggf. das dazugehörige Potential an.

Aufgabe 5 *(2+2 Punkte)*

(a) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von f.

(b) Bestimmen Sie die Funktion f, welche die folgende Laplace-Transformierte besitzt:

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}\ .$$

Aufgabe 6 *(4+1 Punkte)*

(a) Welche Eigenschaften einer Gruppe erfüllt die Menge $G = \{\sqrt[n]{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ verknüpft mit der Operation

$$\sqrt[n]{2} \circ \sqrt[m]{2} := \sqrt[nm]{2}, \qquad n, m \in \mathbb{N}\,?$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x der folgenden Gleichung im endlichen Körper $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$:

$$4 \cdot (x+1) = 1.$$

Aufgabe 7 *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie, ob die Relationen R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf der jeweils angegebenen Menge sind und ermitteln Sie gegebenenfalls die entsprechenden Äquivalenzklassen.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Z}\colon &\quad x \sim_{R_1} y \quad \Longleftrightarrow \quad x + y \text{ ist teilbar durch } 2, \\ \forall g, h \in \{t : t \text{ ist Gerade in } \mathbb{R}^2\}\colon &\quad g \sim_{R_2} h \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ und } h \text{ haben gemeinsame Punkte.} \end{aligned}$$