Mathematik III

(für Informatiker)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17

Mathematik!
TU Chemnitz

Inhalt I

9 Differentialrechnung in mehreren Variablen
9.1 Vektorfolgen und ihre Grenzwerte
9.2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit
9.3 Darstellungsfragen, Anwendungen und Systematisierungsversuch zu Funktionen mehrerer Variablen
9.4 Differenzierbarkeit bei mehreren Variablen
9.5 Differentiation vektorwertiger Funktionen
9.6 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

10 Integralrechnung in mehreren Variablen
10.1 Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$
10.2 Kurven und Kurvenintegrale
10.3 Oberflächen und Oberflächenintegrale

11 Integraltransformationen
11.1 Allgemeines
11.2 Fourier-Transformation
11.3 Laplace-Transformationen

12 Algebraische Strukturen
12.1 Gruppen

Inhalt II

12.2 Ringe und Körper
12.3 Elementare Zahlentheorie
12.4 Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen
12.5 Zahlentheorie und Kryptographie

Inhalt

9 Differentialrechnung in mehreren Variablen

10 Integralrechnung in mehreren Variablen

11 Integraltransformationen

12 Algebraische Strukturen

Inhalt

11 Integraltransformationen
11.1 Allgemeines
11.2 Fourier-Transformation
11.3 Laplace-Transformationen

- Dieses Kapitel kann als Erweiterung der Fourier-Transformation auf nichtperiodische bzw. auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen betrachtet werden.
- In diesem Fall ist die Transformierte jedoch eine (ebenfalls auf $\mathbb{R}$) definierte Funktion anstelle zweier reeller Zahlenfolgen (oder einer komplexen) wie bei den Fourier-Reihen.
- Neben der Fourier-Transformation gibt es weitere ähnliche (lineare) Abbildungen von Funktionen auf Funktionen.
- Diese gestatten es, Eigenschaften der Ausgangsfunktion (wie Glattheit oder Frequenzspektrum) sichtbar zu machen, vereinfachen aber auch Aufgabenstellungen wie die Lösung von Differentialgleichungen.

Definition 11.1

Eine Integraltransformation ist eine Abbildung $T : f \mapsto Tf$ der Form

$$(Tf)(\xi) = \int_D K(x, \xi)\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \xi \in \Omega.$$

Die Funktion $K(x, \xi)$ heißt Kernfunktion der Integraltransformation. D ist dabei ein (nicht notwendig beschränktes) reelles Intervall und $\Omega \subset \mathbb{R}$ (bzw. $M \subset \mathbb{C}$) der Definitionsbereich der transformierten Funktion Tf.

1. **Fourier-Transformation:**

$$f \mapsto \mathscr{F} f, \qquad (\mathscr{F} f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

   Hier ist $D = \Omega = \mathbb{R}$, $K(x,\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\xi x}$.

2. **Laplace-Transformation:**

$$f \mapsto \mathscr{L} f, \qquad (\mathscr{L} f)(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad s \in \mathbb{C}.$$

   Hier ist $D = [0,\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$, und $K(t,s) = e^{-st}$. Die Bezeichnung der Variablen mit t und s ist konventionsbedingt.

Uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sind im Allgemeinen durch den Grenzwert

$$\lim_{A,B\to\infty} \int_{-B}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert, wobei die Grenzwerte $A \to \infty$ und $B \to \infty$ unabhängig voneinander durchzuführen sind, d.h. das uneigentliche Integral existiert, wenn diese Grenzwerte unabhängig voneinander existieren.

Bei Integraltransformationen ist es oft erforderlich, einen allgemeineren Konvergenzbegriff für die auftretenden uneigentlichen Integrale heranzuziehen, bei dem die untere und obere Integrationsgrenze gleichzeitig und symmetrisch gegen $\pm\infty$ streben.

Man sagt, das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert als Cauchyscher Hauptwert $(\mathrm{C.\,H.})$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_{a}^{A}[f(-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a>0 \text{ beliebig})$$

existiert. Man schreibt dann

$$\mathrm{C.\,H.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Offenbar folgt aus der (üblichen) Existenz des uneigentlichen Integrals auch die des Cauchyschen Haupwerts (und stimmt dann mit diesem überein). Die Umkehrung gilt nicht (Gegenbeispiel: $f(x)=\sin x$).

Inhalt

11 Integraltransformationen
11.1 Allgemeines
11.2 Fourier-Transformation
11.3 Laplace-Transformationen

Wir gehen wieder aus von der komplexen Darstellung der Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion f:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-ikx} \, \mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Für eine Periode $T = 2\pi L$, $(L > 0)$ lauten diese Beziehungen

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{ikx/L}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi L} \int_{-L\pi}^{L\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-ikx/L} \, \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11.1}$$

- Erinnerung: $c_{-k} = \overline{c_k}$ falls f reellwertig.
- Zuordnung zwischen Funktion und komplexer Zahlenfolge

$$f \in L^2(-L\pi, L\pi) \longleftrightarrow \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

- Umkehrabbildung: Summierung der Fourier-Reihe.

Einsetzen der Fourier-Darstellung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi L} \int_{-L\pi}^{L\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-ikt/L} \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{ikx/L} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \frac{1}{2\pi} \int_{-L\pi}^{L\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{ik(x-t)/L} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Setze $\Delta\xi := \frac{1}{L}$ und beachte, dass ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\Delta\xi) \cdot \Delta\xi$$

als Riemannsche Summe einer Funktion g zur äquidistanten Zerlegung $\{k\Delta\xi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{R}$ aufgefasst werden kann, welcher für geeignete g in das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \,\mathrm{d}\xi$$

übergeht.

So erhält man beim Grenzübergang $L \to \infty$ bzw. $\Delta\xi \to 0$, $k\Delta\xi \to \xi$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-L\pi}^{L\pi} f(t)\ \mathrm{e}^{ik\Delta\xi(x-t)}\ \mathrm{d}t \right) \cdot \Delta\xi \\
&\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{i\xi(x-t)}\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\xi x} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-i\xi t}\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

oder kurz

$$
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\ \mathrm{e}^{i\xi x}\ \mathrm{d}\xi \quad \text{mit} \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-i\xi t}\ \mathrm{d}t. \tag{11.2}
$$

Bemerkungen:

- Die Beziehungen (11.2) für eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, nicht notwendig periodische Funktion f (oder mit „Periode $T = \infty$") entspricht den Beziehungen (11.1) für eine Funktion f mit Periode $T = 2\pi L$.
- Der Funktion f wird durch (11.2) anstatt – wie bei periodischen Funktionen – einer Folge komplexer Zahlen $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, nun eine Funktion $\hat{f}(\xi), \xi \in \mathbb{R}$ zugeordnet.
- Analog zur Beziehung $c_{-k} = \overline{c_k}$ für reellwertige periodische Funktionen ergibt sich hier $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$, wie man aus (11.2) leicht herleitet.
- Die Darstellung (11.2) (links) zerlegt die Funktion f in Grundschwingungen $e^{i\xi x}$ mit dem <u>kontinuierlichen</u> Frequenzparameter ξ.
- Die obigen Überlegungen waren rein formaler Natur, d.h. wir haben die Gültigkeit des Grenzübergangs und die Existenz der auftretenden Integrale stillschweigend vorausgesetzt. Wir geben nun hinreichende Bedingungen hierfür an.

Definition 11.2 (absolute Integrierbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, falls das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

existiert.

Satz 11.3 (Kriterium für absolute Integrierbarkeit)

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, g über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar und gilt

$$|f(x)| \leq |g(x)| \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

so ist auch f über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar.

Satz 11.4 (Existenz des Fourier-Integrals)

Ist f über $\mathbb{R}$ stückweise stetig und absolut integrierbar, so existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\xi t}\, \mathrm{d}t$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

- Die Aussage folgt mit der absoluten Integrierbarkeit von f wegen

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\xi t}\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| f(t)\, \mathrm{e}^{-i\xi t} \right|}_{=|f(t)|}\, \mathrm{d}t \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

- Da obige Abschätzung gleichmäßig in ξ gilt, ist das Fourier-Integral eine stetige Funktion von ξ.

Definition 11.5

Sei f eine auf $\mathbb{R}$ stückweise stetige und absolut integrierbare Funktion. Die für alle $\xi \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\, \mathrm{d}x \tag{11.3}$$

heißt Fourier-Transformierte oder Spektralfunktion von f. Die durch (11.3) definierte Abbildung $\mathscr{F} : f \mapsto \hat{f} = \mathscr{F} f$ (auch $\mathscr{F}[f]$) heißt Fourier-Transformation.

Mit der Eulerschen Formel erhält man

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi x) f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi x) f(x)\, \mathrm{d}x =: \hat{f}_c(\xi) - i \hat{f}_s(\xi).$$

Hierbei heißen f_c und f_s Kosinustransformation bzw. Sinustransformation von f. Neben $\hat{f}$, $\hat{f}_c$ und $\hat{f}_s$ wird auch die Schreibweise $\mathscr{F} f$, $\mathscr{F}_c f$ bzw. $\mathscr{F}_s f$ verwendet.

Bemerkung: Beim Nachschlagen von Fourier-Transformierten in mathematischen Formelsammlungen ist Folgendes zu beachten:

- In der Literatur findet man die Beziehung (11.2) zwischen einer Funktion und ihrer Fourier-Transformierten auch in der Form

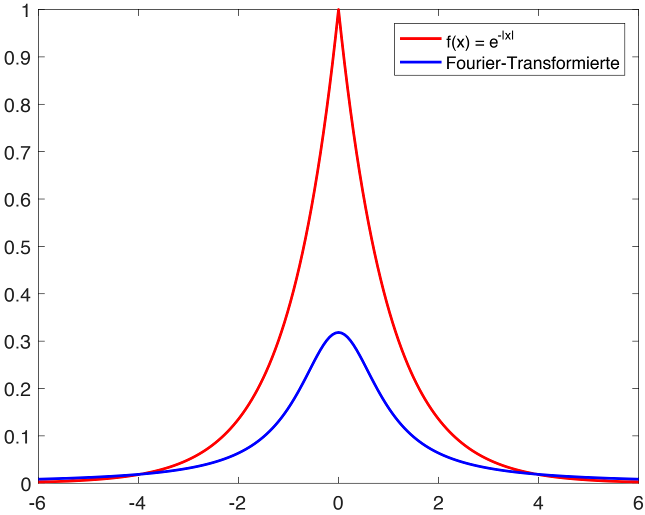
$$f(x) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi, \qquad \hat{f}(\xi) = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x$$

  mit $c_1 c_2 = \frac{1}{2\pi}$, wobei neben der hier verwendeten ($c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2\pi}$) die gebräuchlichsten Varianten $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bzw. $c_1 = \frac{1}{2\pi}$, $c_2 = 1$ sind.
- Auch wird manchmal anstelle von $\mathrm{e}^{-i\xi x}$ als Kern der Fourier-Transformation $\mathrm{e}^{i\xi x}$ verwendet. In diesem Fall ergibt sich als Fourier-Transformierte einer (reellwertigen) Funktion f die konjugiert-komplexe Funktion zu $\hat{f}$.

Man bestimme die Fourier-Transformierte zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.

Fourier-Transformation

Beispiel: exponentiell abfallender Impuls



Satz 11.6 (Inverse Fourier Transformation)

Für eine auf $\mathbb{R}$ stückweise glatte, absolut integrierbare Funktion f mit Fourier-Transformierten $\hat{f}$ gilt in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \mathrm{C.\,H.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Insbesondere gilt in allen Stetigkeitspunkten $x \in \mathbb{R}$ von f

$$f(x) = \mathrm{C.\,H.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Satz 11.7 (Eindeutigkeit)

Erfüllen die Funktionen f_1 und f_2 die Voraussetzungen von Satz 11.6 und gilt $\hat{f}_1(\xi) = \hat{f}_2(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$, so gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, in welchem f_1 und f_2 stetig sind, $f_1(x) = f_2(x)$.

Satz 11.8 (Parseval-Plancherel-Gleichung)

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so existiert $\hat{f} = \mathscr{F} f)$; $\hat{f}$ ist beschränkt und stetig auf $\mathbb{R}$ und es gilt die Parseval-Plancherel-Gleichung (Energiegleichung)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Satz 11.9 (Linearität)

Sind f, f_1 und f_2 auf $\mathbb{R}$ stückweise stetige und dort absolut integrierbare Funktionen, so gilt

$$\mathscr{F}[f_1 + f_2] = \mathscr{F}[f_1] + \mathscr{F}[f_2], \qquad \mathscr{F}[\alpha f = \alpha \mathscr{F}[f] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Satz 11.10 (Verschiebungssatz)

Ist f auf $\mathbb{R}$ stückweise stetig und dort absolut integrierbar, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}[f(x \pm c)] = \mathrm{e}^{\pm ic\xi} \mathscr{F}[f](\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Definition 11.11

Unter dem Faltungsprodukt zweier auf $\mathbb{R}$ definierter Funktionen f und g versteht man den Ausdruck

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Die Definition ist sinnvoll, wenn das Integral existiert. Hinreichend hierfür ist z.B. dass beide Funktionen stetig sind, eine davon absolut integrierbar und die andere beschränkt ist.
- Die Faltung ist kommutativ, d.h. es gilt $f*g = g*f$ (Substitution $x-t=y$).

Satz 11.12 (Faltung)

Seien f und g auf $\mathbb{R}$ beschränkte, stetige und absolut integrierbare Funktionen. Dann gilt $\mathscr{F}[f*g] = \mathscr{F}[f] \cdot \mathscr{F}[g]$.

Satz 11.13 (Differentiation)

Sei f eine auf $\mathbb{R}$ stetige, stückweise glatte Funktion. Ferner seien f und f' auf $\mathbb{R}$ absolut integrierbar. Dann gilt

$$(\mathscr{F} f')(\xi) = i\xi(\mathscr{F} f)(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Satz 11.14 (Differentiation bei Sprungstellen)

] Sei f eine auf $\mathbb{R}$ stückweise glatte Funktion und seien f und f' auf $\mathbb{R}$ absolut integrierbar. Ferner besitze f die n Sprungstellen $x_1, \dots, x_n$. Dann gilt

$$(\mathscr{F} f')(\xi) = i\xi(\mathscr{F} f)(\xi) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k+) - f(x_k-)]\, \mathrm{e}^{-i\xi x_k}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Satz 11.15 (Höhere Ableitungen)

Sei f eine $(r-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $f^{(r-1)}$ stückweise glatt. Ferner seien $f, f', \dots, f^{(r)}$ absolut integrierbar. Dann gilt

$$(\mathscr{F} f^{(r)})(\xi) = (i\xi)^r (\mathscr{F} f)(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Satz 11.16 (Differentiation in Bildbereich)

Existiert die Fourier-Transformierte von $xf(x)$ und bezeichnet $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte von f, so gilt

$$\mathscr{F}[xf(x)] = i\hat{f}'(\xi).$$

Man bestimme die Fourier-Transformierte zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Man beweise die Streckungsregel für Fourier-Transformierte

$$\mathscr{F}[f(cx)] = \frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{c}\right), \qquad c \neq 0.$$

Man bestimme die Lösung der Integralgleichung $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}$.

(1) Bei zeitabhängigen Vorgängen wird anstelle von x meist t als Variable verwendet, der Originalbereich als Zeitbereich, sowie der Bildbereich – mit Variable ω – als Frequenzbereich bezeichnet.

(2) Die mathematische Theorie der Fourier-Transformation (harmonische Analysis) beruht entscheidend auf dem etwas allgemeineren Lebesgue-Integral[1].

(3) Die Fourier-Transformierte existiert dann für alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die im Lebesgueschen Sinne absolut integrierbar sind. Diese Funktionen bilden einen Vektorraum, welcher mit L^1 bzw. $L^1(\mathbb{R})$ bezeichnet wird.

(4) Die quadratisch (Lebesgue-)integrierbaren Funktionen, mit L^2 bezeichnet, bilden ebenfalls einen Vektorraum. Auf diesem ist, aufgrund des Satzes von Plancherel, die Fourier-Transformation (geeignet normiert) eine Isometrie.

(5) Um auch Phänomene modellieren zu können (etwa impulsartige Vorgänge oder Punktladungen), welche über den klassischen Funktionebegriff hinausgehen, kann man die Fourier-Transformation auch auf sog. temperierte Distributionen ausweiten[2].

[1] Henri Lebesgue, 1875–1941.

[2] Laurent Schwarz, 1915–2002.

Inhalt

11 Integraltransformationen
11.1 Allgemeines
11.2 Fourier-Transformation
11.3 Laplace-Transformationen

Für die Existenz ihrer Fourier-Transformation muss eine Funktion absolut integrierbar sein. Viele Funktionen, welche in Anwendungen auftretende Vorgänge beschreiben, sind dies nicht, etwa die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

oder auch $f(t) = e^{\alpha t}$, $f(t) = \sin(\omega t)$, etc. Oft beschreiben solche Funktionen auch impulsiv gestartete Phänomene (Einschaltvorgang), d.h. es gilt

$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0,$$

mit (einfachheitshalber) den Einschaltzeitpunkt als $t = 0$ gewählt.

Um auch solche Funktionen transformieren zu können führt man einen konvergenzerzeugenden Faktor

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0$$

ein und betrachtet anstelle von f die gewichtete Funktion

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \mathrm{e}^{-\alpha t} f(t) & t \geq 0. \end{cases}$$

Als formale Fourier-Transformierte erhält man dann

$$(\mathscr{F}\tilde{f})(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\,\mathrm{e}^{-ist}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+is)t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

oder, mit $z = \alpha + is$,

$$(\mathscr{F}\tilde{f})(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definition 11.17

Die Abbildung, welche einer Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{11.4}$$

zuordnet, heißt Laplace-Transformation, die Funktion F Laplace-Transformierte von f. Alternative Bezeichnungen: $(\mathscr{L} f)(z), \mathscr{L}[f](z)$.

- Auf komplexwertige Funktionen f gehen wir nicht weiter ein.
- Wieder ist zu klären, unter welchen Bedingungen das Integral (11.4) existiert.

Definition 11.18

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist von exponentieller Ordnung γ, falls es Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $t \geq 0$ gilt

$$|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{11.5}$$

Beispiele: Polynome sowie $\sin$ und $\cos$ sind von exponentieller Ordnung. Mit Hilfe der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion erhält man etwa

$$|t^3| = t^3 \leq 6e^t = 6 + 6t + 3t^2 + t^3 + \dots, \qquad t \geq 0.$$

Satz 11.19 (Existenz der Laplace-Transformierten)

Ist die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ, so existiert deren Laplace-Transformierte $F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > \gamma$.

- Das Integral (11.4) existiert unter den Voraussetzungen von Satz 11.19 in einer rechten Halbebene der komplexen Ebene.
- Diese erstreckt sich umso weiter nach links, je schwächer die Funktion für $t \to \infty$ wächst.

(1) Für die Heaviside-Funktion

$$H_a(t) := H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

ergibt sich

$$(\mathscr{L} H_a)(z) = \frac{\mathrm{e}^{-az}}{z}, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

(2) Für die Exponentialfunktion e^{at}, $a \geq 0$, erhält man

$$\mathscr{L}[\,\mathrm{e}^{at}](z) = \frac{1}{z-a}, \qquad \operatorname{Re} z > a.$$

Wie kann man aus einer Laplace-Transformierten die Ausgangsfunktion wiedergewinnnen?

Satz 11.20

Für die Laplace-Transformation F einer auf $\mathbb{R}$ stückweise glatten, für $t < 0$ verschwindenden Funktion f von exponentieller Ordnung γ gilt für alle $x = \operatorname{Re} z > \gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z)\,\mathrm{e}^{zt}\;\mathrm{d}z = \begin{cases} \frac{f(t+)+f(t-)}{2} & t > 0, \\ \frac{f(t+)}{2} & t = 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt für jeden Stetigkeitspunkt t von f

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z)\,\mathrm{e}^{zt}\;\mathrm{d}z, \qquad x = \operatorname{Re} z > \gamma.$$

Satz 11.21 (Eindeutigkeitssatz)

Gilt für zwei Funktionen f und g, welche die Voraussetzungen von Satz 11.20 erfüllen, die Beziehung

$$F(z) = G(z), \qquad \operatorname{Re} z > \gamma,$$

so gilt in jedem Punkt t, an denen f und g stetig sind,

$$f(t) = g(t).$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz kann man Schlüsse folgender Bauart ziehen: aus den beiden Tatsachen, dass

$$F(z) = (\mathscr{L} f)(z) = \frac{1}{z-4} \quad \text{und} \quad \mathscr{L}[\,\mathrm{e}^{4t}](z) = \frac{1}{z-4}$$

folgt $f(t) = \mathrm{e}^{4t}$.

Satz 11.22 (Linearität)

Für zwei stückweise stetige Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung und beliebige reelle Zahlen a, b gilt

$$\mathscr{L}[af + bg] = a\mathscr{L}[f] + b\mathscr{L}[g].$$

Satz 11.23 (Transformation von Ableitung und Integral)

Die Funktion f sei stückweise stetig in $[0, \infty)$ und von exponentieller Ordnung γ.

(a) Ist f stückweise glatt, so gilt für $\operatorname{Re} z > \gamma$

$$\mathscr{L} f' = z \mathscr{L} f - f(0). \tag{11.6}$$

(b) Ist f zudem $(k-1)$-mal stetig differenzierbar und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt, sowie neben f auch $f', f'', \ldots, f^{(k-1)}$ von exponentieller Ordnung γ, so gilt für $\operatorname{Re} z > \gamma$

$$\mathscr{L} f^{(k)} = z^k \mathscr{L} f - z^{k-1} f(0) - z^{k-2} f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0). \tag{11.7}$$

(c) Für $\operatorname{Re} z > \gamma$ gilt

$$\mathscr{L} \left[\int_0^t f(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right] = \frac{1}{z} \mathscr{L} f. \tag{11.8}$$

Man verifiziere die Beziehung

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

Satz 11.24 (Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion)

Die Funktion f habe an der Stelle $t = a > 0$ eine Unstetigkeit in Form einer Sprungstelle. Ansonsten seien die Voraussetzungen des Satzes 11.23 erfüllt. Dann gilt

$$\mathscr{L} f' = z \mathscr{L} f - f(0) - [f(a+) - f(a-)] \, \mathrm{e}^{-az}.$$

Satz 11.25 (Dämpfung, Verschiebung, Streckung)

Die Funktion f sei von exponentieller Ordnung γ sowie

$$F(z) = (\mathscr{L} f)(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Re} z > \gamma.$$

(a) Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich:
$$\mathscr{L}[\,\mathrm{e}^{-at} f(t)] = F(z+a), \qquad \operatorname{Re} z > \gamma - a.$$

(b) Für $a > 0$ gilt
$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{z}{a}\right), \qquad \operatorname{Re} z > a\gamma.$$

Definition 11.26

Unter dem Faltungsprodukt der Funktionen f und g verstehen wir hier die Funktion

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Satz 11.27 (Faltungssatz)

Die Funktion f sei in $\mathbb{R}$ stetig, die Funktion g stückweise stetig. Beide seien von exponentieller Ordnung γ, und es gelte $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Dann existiert die Laplace-Transformierte der Faltung $f * g$ für $\operatorname{Re} z > \gamma$ und es gilt

$$\mathscr{L}(f * g) = (\mathscr{L} f) \cdot (\mathscr{L} g).$$

also ist die Laplace-Transformierte des Faltungsproduktes zweier Funktionen gleich dem Produkt der Laplace-Transformierten der Funktionen.

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = r(t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

und einer stückweise stetigen Funktion $r = r(t)$ von exponentieller Ordnung. Mit den Laplace-Trenasformationen $Y = \mathscr{L}y$ und $R = \mathscr{L}r$ gilt dann

$$Y(z) = \frac{R(z)}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} =: R(z)G(z).$$

Findet man nun eine Funktion $g = g(t)$ mit $\mathscr{L} g = G$, so gilt nach dem Faltungssatz

$$\mathscr{L} y = Y = GR = (\mathscr{L} g) \cdot (\mathscr{L} r) = \mathscr{L}(g * r)$$

oder

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) r(\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t-\tau)$ heißt Greensche Funktion für das obige Anfangswertproblem. Hat man die Greensche Funktion gefunden, ist die Lösung des Anfangswertproblems für unterschiedliche rechte Seiten $r(t)$ auf die Berechnung eines Integrals reduziert.

Man löse folgende Differentialgleichungsprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation:

(1)

$$y'' + 9y = \cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

(2)

$$u' = u + 5v, \quad v' = -(u + 3v), \qquad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Oft gilt es zeitliche Vorgänge zu modellieren, welche durch extrem kurz andauernden Wirkungen charakterisiert sind, etwa ein Hammerschlag oder kurzzeitige Stromstöße, bei denen aber nur der „Gesamtimpuls“ von Interesse ist. Dieser kann, sofern sich die Wirkung zwischen t_0 und t_1 ereignet, durch Ausdrücke der Form

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \,\mathrm{d}t, \qquad t_1 \text{ nahe bei } t_0$$

beschrieben werden.
Eine „Impulsfunktion“ wäre z.B. für $0 < \epsilon$ „klein“

$$\delta_\epsilon(t) := \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & t \in (0, \epsilon), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Hier ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) \,\mathrm{d}t = 1.$$

Mit Hilfe der Heaviside-Funktion lässt sich δ_ϵ schreiben als

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\left[H(0) - H(t-\epsilon)\right].$$

Als Idealisierung möchte man gerne den Gesamtimpuls auf den Punkt $t = 0$ konzentrieren, etwa durch den Grenzübergang

$$\delta(t) := \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0, \\ \infty & t = 0, \end{cases} \qquad \text{unter Beibehaltung von} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Der Grenzwert ∞ ist jedoch nicht zulässig, und die Integralbeziehung nach unserer Definition des Riemann-Integrales ist nicht möglich.

Abhilfe schafft der Begriff der verallgemeinerten Funktionen oder auch Distributionen, welche nur durch deren Wirkung auf stetige Funktionen g definiert sind:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t.$$

Unter Nutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhalten wir

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0}^{\epsilon} g(t)\frac{1}{\epsilon}\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0} g(t_0+\eta\epsilon) = g(t_0).$$

Die δ-Distribution ist daher definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0) = g(t_0) \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t_0-t) = g(t_0), \qquad g \text{ stetig.} \tag{11.9}$$

Setzen wir noch $g(t) = 0$ für $t < 0$, so erhalten wir

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = g(t_0).$$

Speziell für die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-zt} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

erhalten wir die Laplace-Transformierte der δ-Distribution

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}\delta(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-z\cdot 0} = 1.$$

Allgemeiner gilt

$$(\mathscr{L}\delta)(z) \equiv 1, \qquad \mathscr{L}[\delta(t - a)](z) = \mathrm{e}^{-az}.$$

Die Heaviside-Funktion ergibt sich nun als

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \neq 0.$$

Die Beziehung (11.9) bedeutet, dass für stetige Funktionen g

$$\delta * g = g,$$

also die Faltung mit δ die Funktion unverändert lässt.
Zur Behandlung von Einschaltvorgängen, d.h. der plötzlichen Aktivierung einer Störung $g(t)$ zu einem Zeitpunkt $t = a$, benötigt man die Laplace-Transformation der Funktion $s(t) = H(t-a)g(t-a)$:

Satz 11.28

Sei $g(t)$ eine stückweise stetige Funktion und a eine positive Zahl. Dann gilt $\mathscr{L}[H(t-a)g(t-a)] = \mathrm{e}^{-az}\mathscr{L}[g(t)]$.

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Fourier-Reihen und Fourier-Transformation verstanden haben.
- Einfache Fourier-Integrale und inverse Fourier-Integrale berechnen können.
- Voraussetzungen für die Existenz sowie die wichtigsten Rechenregeln für Fourier-Transformationen kennen.
- Den grundlegenden Ansatz verstanden haben, wie man mit Fourier- oder Laplace-Transformationen Differentialgleichungsprobleme lösen kann.