

Mathematik III

(für Informatiker)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17



Mathematik!
TU Chemnitz

9 Differentialrechnung in mehreren Variablen

9.1 Vektorfolgen und ihre Grenzwerte

9.2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

9.3 Darstellungsfragen, Anwendungen und Systematisierungsversuch zu Funktionen mehrerer Variablen

9.4 Differenzierbarkeit bei mehreren Variablen

9.5 Differentiation vektorwertiger Funktionen

9.6 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

10 Integralrechnung in mehreren Variablen

10.1 Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

10.2 Kurven und Kurvenintegrale

10.3 Oberflächen und Oberflächenintegrale

11 Integraltransformationen

11.1 Allgemeines

11.2 Fourier-Transformation

11.3 Laplace-Transformationen

12 Algebraische Strukturen

12.1 Gruppen

12.2 Ringe und Körper

12.3 Elementare Zahlentheorie

12.4 Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

12.5 Zahlentheorie und Kryptographie

- 9 Differentialrechnung in mehreren Variablen
- 10 Integralrechnung in mehreren Variablen**
- 11 Integraltransformationen
- 12 Algebraische Strukturen

10 Integralrechnung in mehreren Variablen

10.1 Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

10.2 Kurven und Kurvenintegrale

10.3 Oberflächen und Oberflächenintegrale

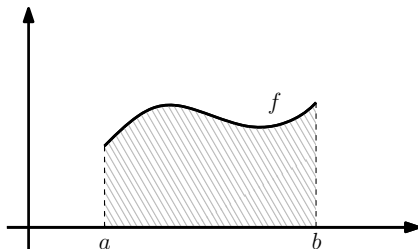
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Begriffsbildung und erste Eigenschaften

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet.



Wir suchen nach einer Verallgemeinerung, mit der man z.B. Volumina unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann.

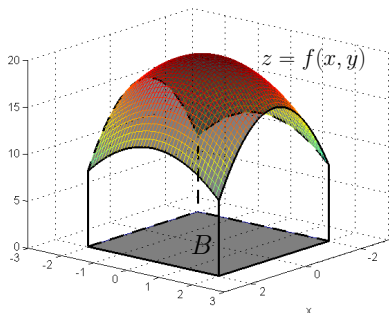
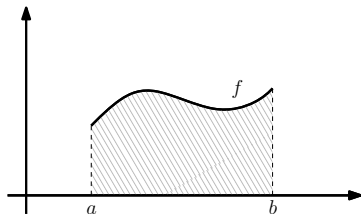
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Begriffsbildung und erste Eigenschaften

Wir formulieren den Integralbegriff zunächst allgemein im \mathbb{R}^n und gehen erst später konkret auf die Fälle $n = 2$ bzw. $n = 3$ ein.

Im Vergleich zum Eindimensionalen treten folgende neue Probleme auf:

- die Arbeit mit zwei (oder noch mehr) Variablen im Integranden,
- der Integrationsbereich B kann im \mathbb{R}^n eine wesentlich größere Formenvielfalt annehmen (nicht nur das dargestellte Rechteck).

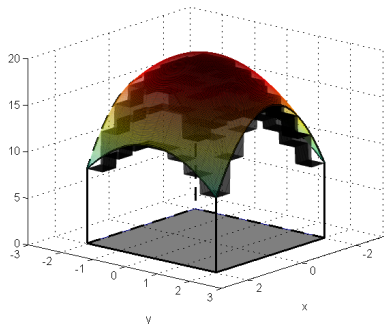
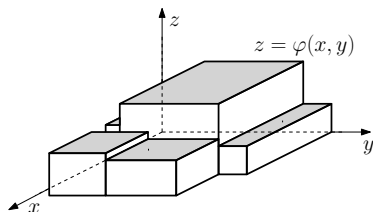


Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Begriffsbildung und erste Eigenschaften

Der Aufbau des Integralbegriffs erfolgt analog zum Eindimensionalen, d.h. in folgenden Schritten:

- Definition des Integrals für Treppenfunktionen (stückweise konstant über Rechtecken/Quadern),
- Approximation des gewünschten Volumens von oben und unten mit Integralen von Treppenfunktionen (d.h. der Summe von Quadvolumina).



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Begriffsbildung und erste Eigenschaften

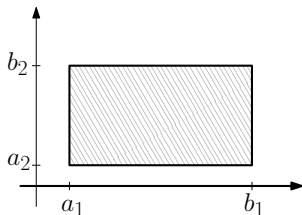
Wir beginnen mit den Treppenfunktionen. Dafür definieren wir zunächst für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, n$) ein **abgeschlossenes Intervall** mittels

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Es besitzt das **Volumen**

$$\text{vol}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Geometrisch handelt es sich bei $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ um ein achsenparalleles Rechteck bzw. einen achsenparallelen Quader mit \mathbf{a} und \mathbf{b} als diametrale Ecken.



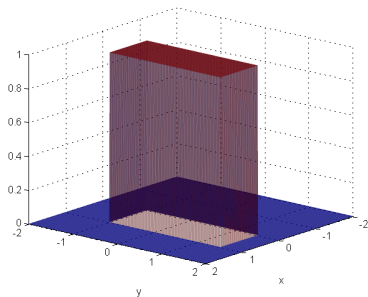
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Begriffsbildung und erste Eigenschaften

Für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir desweiteren die **charakteristische Funktion** (auch **Indikatorfunktion**)

$$\chi_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{für } \mathbf{x} \in M; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel:



Charakteristische Funktion $\chi_M(x, y)$ für das Rechteck $M = [0, 1] \times [-1, 1.5]$.

Definition 10.1

Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$\phi(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^k \lambda_j \chi_{I_j}(\mathbf{x}),$$

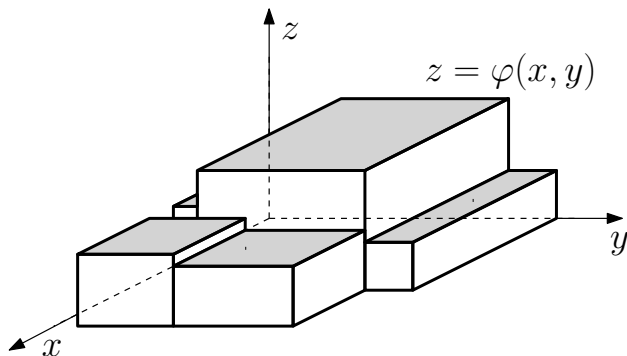
wobei $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $I_j \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Intervalle seien, heißt **Treppenfunktion** auf \mathbb{R}^n .

Wir definieren deren **Integral** über

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \sum_{j=1}^k \lambda_j \operatorname{vol}(I_j).$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Interpretation



Graph einer Treppenfunktion ϕ auf \mathbb{R}^2 (grau).

Das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y) \, d(x, y)$ ist die Summe der Volumina der darunterliegenden Quader.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Approximationsschritt

Für eine beschränkte Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir nun **Ober-** und **Unterintegral** gemäß

$$\overline{\int} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \psi \text{ Treppenfunktion, } \psi \geq f \right\}$$

$$\underline{\int} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \phi \text{ Treppenfunktion, } \phi \leq f \right\}$$

Dabei denken wir uns f außerhalb von B auf ganz \mathbb{R}^n mit dem Wert 0 fortgesetzt.

Definition 10.2

Eine beschränkte Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn ihr Ober- und Unterintegral (auf B) übereinstimmen. In diesem Falle definieren wir

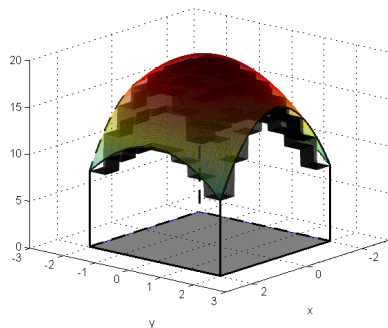
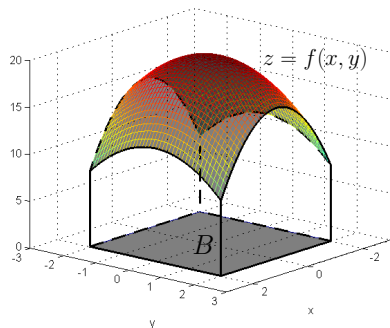
$$\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_B^- f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_B^+ f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Wie im Eindimensionalen ist eine Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Bereich Riemann-integrierbar, wenn sie dort stetig ist.

Die Umkehrung ist natürlich falsch, wie das Beispiel der Treppenfunktionen zeigt.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Interpretation



Das gesuchte Volumen muss sich „von unten her“ beliebig gut mit Quadern „auskleiden“ lassen. Eine ähnliche Konstruktion muss „von oben her“ möglich sein.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Riemann-Integral

Wie im Eindimensionalen lassen sich Integrale mit Definition 10.2 i.A. nicht berechnen.
Aber es ergeben sich zumindest einige Rechenregeln:

Satz 10.3

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so auch $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f|$, $f \pm g$ und fg .

Es gelten die folgenden Integrationsregeln:

$$\int_B (f \pm g)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \pm \int_B g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\int_B (\lambda f)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ist weiterhin $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, so gilt

$$\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{B_1} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{B_2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Satz 10.4

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $f \leq g$ auf B , so gilt

$$\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_B g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Insbesondere folgt aus $c \leq f(\mathbf{x})$ bzw. $f(\mathbf{x}) \leq C$ für alle $\mathbf{x} \in B$, dass

$$c \cdot \text{vol}(B) \leq \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq C \cdot \text{vol}(B),$$

wobei $\text{vol}(B)$ das Volumen von B bezeichnet.

Außerdem gilt

$$\left| \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_B |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integrale über quader/rechteckförmige Bereiche

Bei der Berechnung des Integrals $\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ versucht man zumeist auf eindimensionale Integrale zurückzugreifen.

Besonders einfach gestaltet sich dies, wenn der Bereich B ein abgeschlossenes Intervall ist.

Satz 10.5

Ist $f : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ein Intervall, so gilt

$$\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \dots \left[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \right] \dots dx_2 \right] dx_1, \quad (10.1)$$

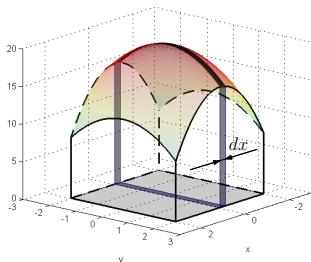
falls die Integrale auf der rechten Seite existieren.

Man kann die Integration dann also komponentenweise ausführen.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Deutung

Im folgender Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleiner Dicke dx näherungsweise das Volumen $(\int_{-2}^2 f(x, y) dy) \cdot dx$.



Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumina entspricht gerade der Integration über die Variable x , d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 f(x, y) dy dx.$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge

In der Darstellung (10.1) kann man die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauschen, sofern alle entstehenden Integrale wieder existieren. Dies ist insbesondere der Fall, wenn der Integrand stetig ist.

Im zweidimensionalen Fall gilt also zum Beispiel

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Dies kann man sich mitunter zum bequemeren Rechnen zunutze machen.

Tiefere Erkenntnisse über die Existenz und die Vertauschbarkeit der iterierten Integrale liefern die Sätze von Fubini und Tonelli (Literatur).

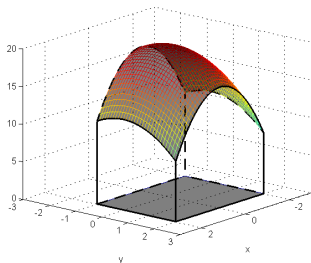
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge

Bestimmen Sie das durch den Graphen der Funktion

$$f(x, y) = 20 - 2x^2 - y^2,$$

die x - y -Ebene sowie die Ebenen $x = -2$, $x = 2$, $y = -1$ und $y = 2$ begrenzte Volumen.



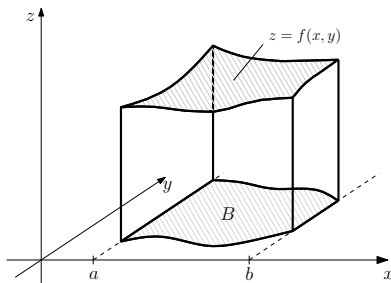
Bestimmen Sie $\int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin y \, dy \, dx$ sowohl in der vorgegebenen Form als auch unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integration über Normalbereiche

Bislang können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Dies reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus – meist ist der Integrationsbereich B krummlinig oder zumindest anders begrenzt.



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen. Dies wollen wir zumindest für Flächen- und Volumenintegrale erörtern.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Übliche Notationen

Für Flächenintegrale ($f : \mathbb{R}^2 \supset B \rightarrow \mathbb{R}$) verwendet man neben $\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ auch die Bezeichnungen

$$\int_B f(x, y) \, d(x, y), \quad \int_B f(x, y) \, dx \, dy, \quad \int_B f(x, y) \, dA$$

sowie

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{und} \quad \iint_B f(x, y) \, dA.$$

Für Volumenintegrale ($f : \mathbb{R}^3 \supset B \rightarrow \mathbb{R}$) verwendet man neben $\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ auch die Bezeichnungen

$$\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z), \quad \int_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad \int_B f(x, y, z) \, dV$$

sowie

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{und} \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dV.$$

Definition 10.6

Sind $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $g \leq h$ auf $[a, b]$, so nennen wir die Mengen

$$B_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\} \text{ bzw.}$$

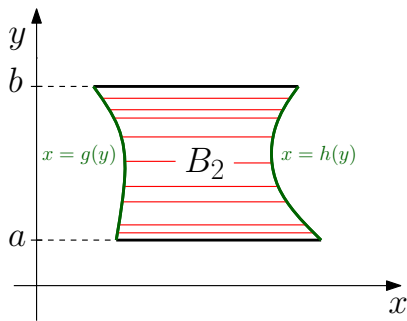
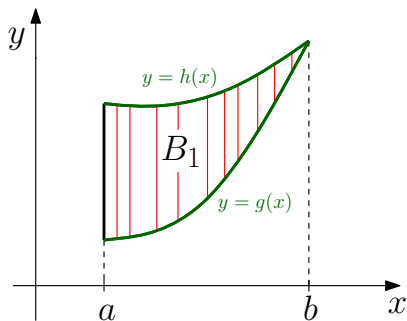
$$B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ und } g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

einen **Normalbereich** bezüglich der x -Achse bzw. bezüglich der y -Achse.

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bezüglich beider Achsen.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

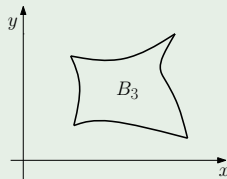
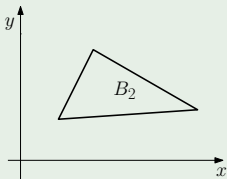
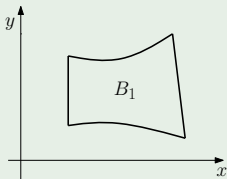
Grafische Interpretation



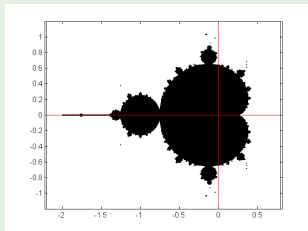
$y = g(x)$ und $y = h(x)$ bzw. $x = g(y)$ und $x = h(y)$ lassen sich als „Grund-“ und „Deckelkurve“ von B interpretieren. Die vertikale bzw. horizontale Verbindung zwischen beiden liegt immer komplett in B .

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Sind die folgenden Mengen Normalbereiche bezüglich der x - bzw. der y -Achse?
Wenn nicht – lassen sie sich zumindest in endlich viele Normalbereiche zerlegen?

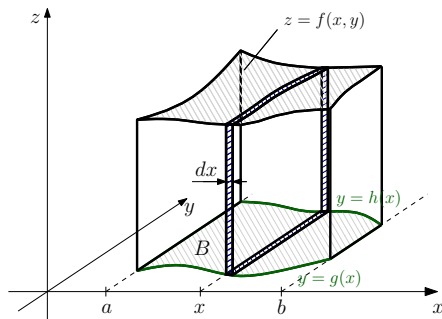


Was vermuten Sie bei folgender Menge (Mandelbrot-Menge, auch „Apfelmännchen“ genannt)?



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren:



Die markierte Scheibe bei $x = \text{const}$ mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right] \cdot dx.$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a, b]$ zu integrieren.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integral über ebene Normalbereiche

Satz 10.7

Seien $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g \leq h$ auf $[a, b]$ und

$$B_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

$$B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ und } g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

die zugehörigen Normalbereiche im \mathbb{R}^2 .

Ist $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\iint_{B_1} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right] dx.$$

Ist $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\iint_{B_2} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right] dy.$$

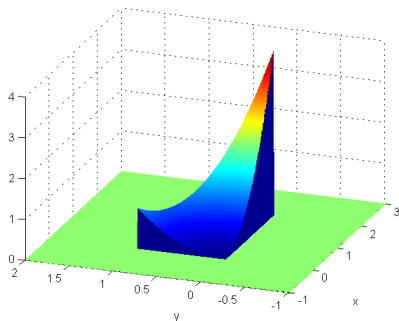
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integral über ebene Normalbereiche

Das Dreieck D mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$ und $(0,1)$ stellt einen Normalbereich bezüglich beider Achsen dar. Berechnen Sie

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

auf beide in Satz 10.7 angegebene Weisen.



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Wichtige Flächenintegrale

- Das Integral

$$A = \iint_B 1 \, dx \, dy$$

ergibt die **Fläche** von B . Für einen Normalbereich bzgl. der x -Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx.$$

- Interpretiert man $\rho(x, y)$ als ortsabhängige Flächendichte (Einheit kg/m^2), so erhält man mit

$$m = \iint_B \rho(x, y) \, dx \, dy$$

die **Masse** von B .

- $x_S = \frac{1}{A} \iint_B x \, dx \, dy$ und $y_S = \frac{1}{A} \iint_B y \, dx \, dy$ sind die Koordinaten des **Flächenschwerpunkts** (x_S, y_S) von B .

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Vorzeichenfragen

Interpretiert man $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$ als Volumen zwischen der x - y -Ebene und dem Graphen von f über dem Bereich B , so werden die Teile unterhalb der x - y -Ebene negativ gewichtet.

Ist man an einer nicht vorzeichenbehafteten Angabe interessiert, so muss man anstelle von f die Funktion $|f|$ integrieren. Dazu teilt man B in die Bereiche

$$B_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0\},$$
$$B_- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\}$$

und berechnet (sofern das möglich ist)

$$\iint_B |f(x, y)| \, dx \, dy = \iint_{B_+} f(x, y) \, dx \, dy - \iint_{B_-} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integration über dreidimensionale Normalbereiche

Bei Volumenintegralen gibt es leider keine geometrische Veranschaulichung wie bei Flächenintegralen.

Am ehesten kann man sich B noch als Körper mit ortsabhängiger Dichte $f(x, y, z)$ vorstellen, und $\iiint_B f(x, y, z) \, dV$ als dessen Masse interpretieren.

Zumindest bleibt aber der Integrationsbereich selbst geometrisch darstellbar.

Wie bei den Flächenintegralen kann man die meisten praktisch auftretenden Bereiche auf Normalbereiche zurückführen.

Definition 10.8

Seien $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f_1 \leq f_2$ auf $[a, b]$. Wir definieren den 2D-Normalbereich

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Seien außerdem $g_1, g_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g_1 \leq g_2$ auf G . Dann nennen wir

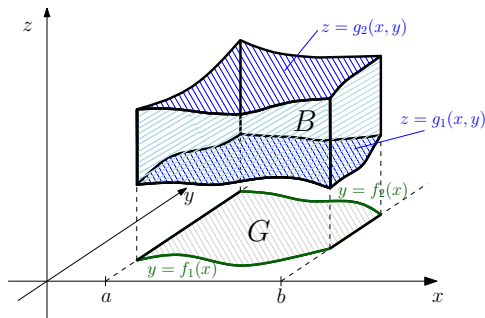
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \text{ und } f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ \text{und } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

einen (3D)-**Normalbereich**.

Vertauscht man die Rollen von x , y und z , so entstehen fünf weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Interpretation



- $z = g_1(x, y)$ und $z = g_2(x, y)$ stellen die „Grund-“ und „Deckelfläche“ von B dar – die vertikale Verbindung zwischen beiden muss immer komplett in B liegen.
- Der Normalbereich G ist die senkrechte Projektion von B in die x - y -Ebene. Dessen „Grund-“ und „Deckelkurve“ sind durch $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ gegeben.

Man berechne das Dreifachintegral

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=1-x}^0 \int_{z=0}^{10(x^2+y)} x^2 y \, dz \, dy \, dx.$$

(Hinweis: Die hier verwendete Notation der Integralgrenzen hilft, die Übersicht über die Variablen zu behalten, ist aber entbehrlich.)

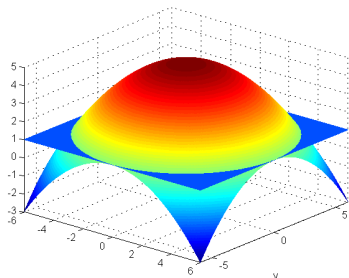
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ der durch die Flächen $z = 1$ und $\frac{1}{9}(x^2 + y^2) = 5 - z$ begrenzte Körper. Wie lautet das Dreifachintegral

$$\iiint_B z \, dV$$

mit explizit angegebenen Grenzen in kartesischen Koordinaten?

(Wenn Sie das Ergebnis berechnen wollen, reservieren Sie sich viel Zeit oder warten Sie besser bis zum nächsten Abschnitt.)



- Das Integral

$$V = \iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz$$

ergibt das **Volumen** von B . Für einen Normalbereich gemäß Definition 10.8 erhält man

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (g_2(x,y) - g_1(x,y)) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

- Interpretiert man $\rho(x, y)$ als ortsabhängige Dichte (Einheit kg/m^3), so erhält man mit

$$m = \iiint_B \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

die **Masse** von B .

- Der **Schwerpunkt** (x_S, y_S, z_S) von $B \subset \mathbb{R}^3$ besitzt die Koordinaten

$$x_S = \frac{1}{m} \iiint_B x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$y_S = \frac{1}{m} \iiint_B y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$z_S = \frac{1}{m} \iiint_B z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

In homogenen Körpern kann man dabei $\rho = 1$ und $m = V$ setzen.

- Das **Trägheitsmoment** von B bei Rotation um eine Achse ergibt sich über

$$J = \iiint_B d(x, y, z)^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Dabei ist $d(x, y, z)$ der Abstand des Punktes (x, y, z) zur Drehachse. Für die Rotation um die z -Achse ist zum Beispiel $d(x, y, z)^2 = x^2 + y^2$ zu setzen.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Die Transformationsformel

Häufig sind kartesische Koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeeignet – z.B. wenn man Symmetrien bezüglich gewisser Punkte oder Achsen nutzen will.

Daher behandeln wir als nächstes **Variablentransformationen** vom Typ

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und verallgemeinern die 1D-Substitutionsregel

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) \, dt \quad (10.2)$$

(mit f stetig, $x = \phi(t)$, $\phi : [a, b] \rightarrow I$ stetig differenzierbar, I Intervall, vgl. Satz 6.11).

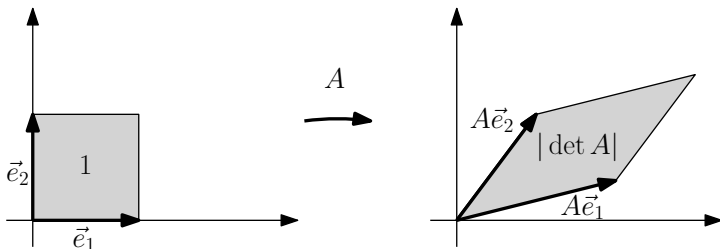
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Lokaler Verzerrungsfaktor von Koordinatentransformationen

Erinnern wir uns an die lineare Algebra (S. 361). Das Bild des Einheitsquadrats/-würfels unter der linearen Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

ist ein Parallelogramm mit Fläche $|\det A|$.



Dies bleibt wahr, wenn man zur affin-linearen Abbildung $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ übergeht – es kommt lediglich eine Verschiebung hinzu.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Lokaler Verzerrungsfaktor von Koordinatentransformationen

Betrachtet man nun eine genügend glatte nichtlineare Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so gilt zumindest nahe eines festen Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(\mathbf{x}) \approx \Phi(\mathbf{x}_0) + \Phi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Die rechte Seite stellt gerade eine Abbildung vom Typ $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ dar, wobei die Jacobi-Matrix $\Phi'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Rolle von A übernimmt.

Somit ist der lokale Flächenverzerrungsfaktor von Φ gegeben durch $|\det \Phi'(\mathbf{x}_0)|$, d.h. durch den Betrag der **Jacobi-** oder **Funktionaldeterminante**.

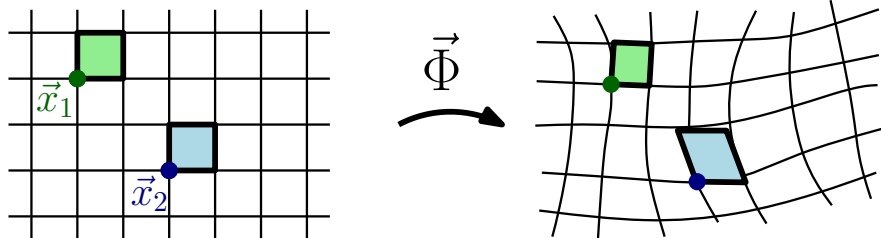
Die lokale Flächenverzerrung muss bei der Substitution in Integralen berücksichtigt werden (denn diese berechnen lokal Fläche mal Funktionswert), und zwar in der Form

$$„d\mathbf{x} = |\det \Phi'(\mathbf{y})| d\mathbf{y}“, \quad \text{falls } \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}).$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Darstellung im \mathbb{R}^2

Ein sehr feines quadratisches Koordinatengitter wird durch $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in erster Näherung auf ein Parallelogrammgitter abgebildet.



Die Flächen der einander entsprechenden markierten Vierecke unterscheiden sich gerade um den Faktor $|\det \Phi'(\mathbf{x}_1)|$ bzw. $|\det \Phi'(\mathbf{x}_2)|$

Satz 10.9

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \rightarrow V$ bijektiv und stetig differenzierbar, $\det \Phi'(\mathbf{y}) \neq 0$ für alle $\mathbf{y} \in U$, sowie $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_V f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_U f(\Phi(\mathbf{y})) |\det \Phi'(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}.$$

Die Aussage bleibt richtig, wenn man

- lediglich die Bijektivität von $\Phi : U \setminus M \rightarrow V \setminus N$ oder
- $\det \Phi'(\mathbf{y}) \neq 0$ nur für $\mathbf{y} \in U \setminus M'$

fordert, solange M , M' und N das Volumen (die Fläche) 0 besitzen.

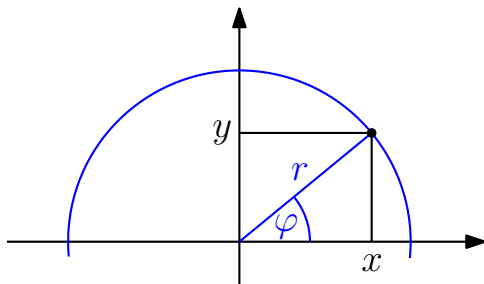
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Ebene Polarkoordinaten

Im \mathbb{R}^2 ist die Transformation in Polarkoordinaten mit Abstand die Wichtigste:

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} r \\ \phi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{bmatrix}$$

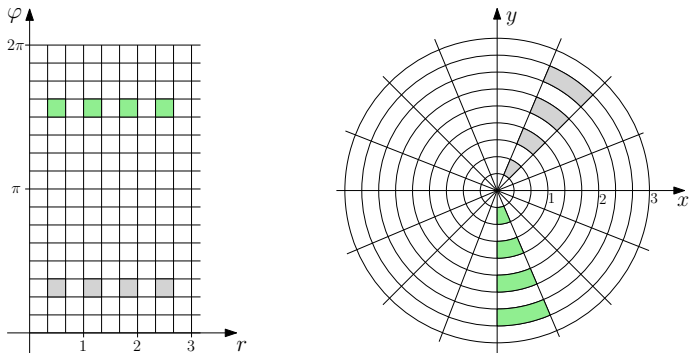
Sie haben sie bereits im Kontext der komplexen Zahlen in Abschnitt 1.6 kennengelernt.



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Ebene Polarkoordinaten

Den lokalen Verzerrungsfaktor für Polarkoordinaten kann man sich bereits anhand der Gitternetze erschließen:



Die lokale Verzerrung ist offenbar proportional zu r .

Die Proportionalitätskonstante ist 1, da ϕ als Länge des Bogens auf dem Einheitskreis definiert ist, d.h. nahe dem Einheitskreis findet keine Flächenverzerrung statt.

Prüfen wir die so gewonnene Vermutung anhand von Satz 10.9. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}\det \Phi'(r, \phi) &= \begin{vmatrix} x_r(r, \phi) & x_\phi(r, \phi) \\ y_r(r, \phi) & y_\phi(r, \phi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} \\ &= r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= r.\end{aligned}$$

Bei der Substitution in Polarkoordinaten gilt also

$$\iint_{\Phi(B)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_B f(r \cos \phi, r \sin \phi) \, r \, dr \, d\phi.$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

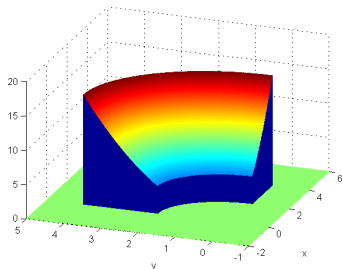
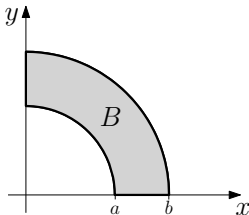
Ebene Polarkoordinaten

Berechnen Sie für den Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ im Bild unten links das Integral

$$\iint_B (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

unter Verwendung von Polarkoordinaten.

Könnte man auch die Erkenntnisse aus Abschnitt 6.4 über das Volumen von Rotationskörpern nutzen?



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Zylinderkoordinaten

Möchte man in Volumenintegralen Rotationssymmetrie bezüglich einer Koordinatenachse (hier: z -Achse) ausnutzen, verwendet man häufig **Zylinderkoordinaten**.

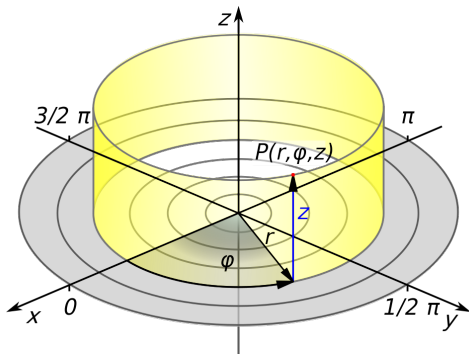


Bild: Honina/Ichijiku,
Wikimedia Commons

Die x - y -Anteile werden dabei in Polarkoordinaten transformiert und die z -Koordinate beibehalten.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Zylinderkoordinaten

Die Transformationsgleichungen bzw. die Transformationsabbildung lauten

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x(r, \phi, z) \\ y(r, \phi, z) \\ z(r, \phi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{bmatrix}.$$

Somit gilt

$$\det \Phi'(r, \phi, z) = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Bei der Substitution in Zylinderkoordinaten gilt also

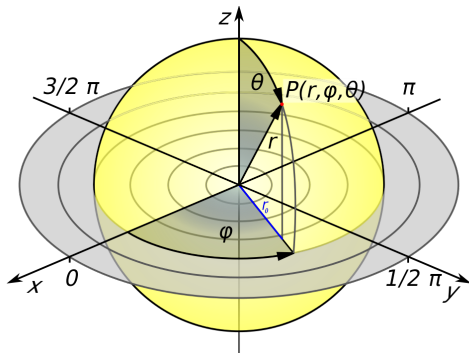
$$\iiint_{\Phi(B)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(r \cos \phi, r \sin \phi, z) \, r \, dr \, d\phi \, dz.$$

Berechnen Sie das Integral aus dem Beispiel von S. 172 mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Kugelkoordinaten

Bei Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung bieten sich desweiteren **Kugelkoordinaten** an.



r ... Radius
 ϕ ... (östl.) geogr. Länge
 θ ... Poldistanz

Bild: Honina/Ichijiku,
Wikimedia Commons

Anstelle der Poldistanz wird gelegentlich auch die geografische Breite verwendet. In den folgenden Formeln ist dabei jeweils $\sin \theta$ statt $\cos \theta$ zu schreiben und umgekehrt.

Die Transformationsabbildung lautet bei Kugelkoordinaten

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x(r, \phi, \theta) \\ y(r, \phi, \theta) \\ z(r, \phi, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix}$$

und damit

$$|\det \Phi'(r, \phi, \theta)| = r^2 \sin \theta.$$

Bei der Substitution in Kugelkoordinaten gilt also

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Phi(B)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_B f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\phi \, d\theta. \quad (10.3) \end{aligned}$$

Bestätigen Sie die Beziehung $|\det \Phi'(r, \phi, \theta)| = r^2 \sin \theta$.

10 Integralrechnung in mehreren Variablen

10.1 Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

10.2 Kurven und Kurvenintegrale

10.3 Oberflächen und Oberflächenintegrale

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Kurven und Kurvenintegrale

Wir wenden uns nun der **Integration von Funktionen entlang Kurven** oder Wege zu.

Motivierende Fragestellungen sind:

- Wie kann man die Länge einer krummlinigen Kurve berechnen?
- Welche mechanische Arbeit wird bei der Bewegung eines Massepunktes durch ein Kraftfeld entlang einer bestimmten Kurve verrichtet?

Wir klären zunächst, was eine Kurve ist. In Abschnitt 9.3 hatten wir Kurven als Abbildungen vom Typ

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit gewissen Glattheitseigenschaften kennengelernt, die wir spezifizieren müssen.

Definition 10.10

Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Kurvenstück**.

Unter einer Kurve verstehen wir eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sie besteht aus endlich vielen Kurvenstücken

$$\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, k, \quad t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t_e,$$

die miteinander verbunden sind, d.h. es gilt

$$\gamma_{i+1}(t_i) = \gamma_i(t_i), \quad i = 1, \dots, k-1.$$

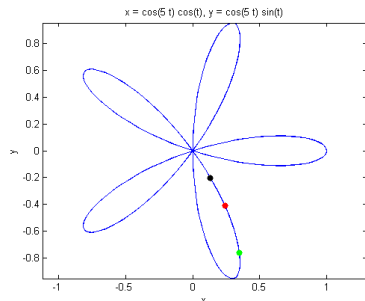
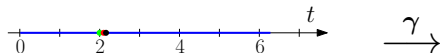
Das Argument $t \in [t_a, t_e]$ wird **Kurvenparameter** genannt.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Interpretation

Der Kurvenparameter wird meist als Zeit interpretiert und $\gamma(t) : t \in [t_a, t_e]\}$ als Bahn eines Punktes beim „Durchlaufen“ der Kurve.

Meist visualisiert man nur diese Bahnkurve (d.h. das Bild von γ), wobei die Zeitinformation verloren geht (vgl. Abschnitt 9.3).



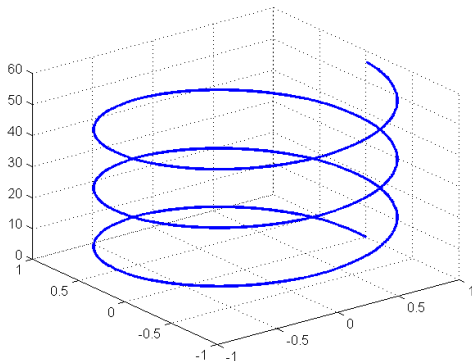
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Interpretation

Die Kurve

$$\gamma : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3t \end{bmatrix}$$

beschreibt eine Schraubenlinie mit 3 Windungen, die auf Höhe 0 startet und auf Höhe 18π endet.



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Geometrische Interpretation

Beschreiben Sie den Bahnverlauf der Kurve

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ -2 \sin t \end{bmatrix}.$$

Achten Sie genau auf den Definitionsbereich.

Geben Sie zwei verschiedene Kurvendarstellungen („Parametrisierungen“) zum Geradenstück im \mathbb{R}^2 an, welches in $(0, 0)$ beginnt und in $(1, 2)$ endet.

Eine der gewählten Parametrisierungen sollte eine nichtlineare Funktion von t sein.

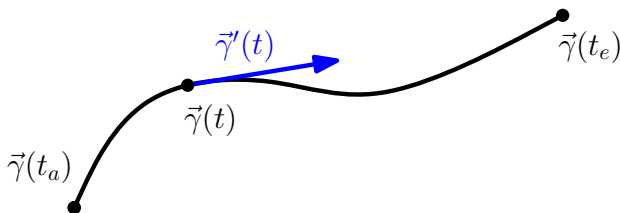
Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Interpretation der Ableitung

Die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = [\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)]^T \quad (t \neq t_i, i = 1, \dots, k-1)$$

wird in diesem Kontext als Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\vec{\gamma}(t)$ interpretiert. Er verläuft tangential zur Bahnkurve.



Zu welchen Zeiten bewegt sich ein Punkt auf der ersten Kurve von S. 193 in Richtung $[0, 1]^T$? Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit für diese Kurve in Abhängigkeit von der Zeit t ?

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Bogenelemente

Sei dt eine beliebige reelle Zahl, $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $t \in [t_a, t_e]$. Dann heißt

$$d\mathbf{x} := \gamma'(t) dt$$

vektorielles Bogenelement.

Es beschreibt die Änderung des Ortes entlang der Tangente ausgehend vom Punkt $\gamma(t)$, wenn man sich mit Geschwindigkeit $\gamma'(t)$ eine Zeit dt lang auf dieser fortbewegt.

Für sehr kleine Zeiten dt stimmt die Änderung des Ortes $d\mathbf{x}$ entlang der Tangente nahezu mit der Ortsänderung entlang der Kurve γ überein.

Die Länge des vektoriellen Bogenelements ist

$$ds := \|\gamma'(t)\| dt$$

und wird als **skalares Wegelement** oder **Längenelement** bezeichnet.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Kurvenintegral erster Art (skalares Kurvenintegral)

Für sehr kleine Zeiten dt entspricht das Längenelement $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ der in dieser Zeit auf der Kurve γ zurückgelegten Weglänge.

Es ist naheliegend, die Länge der Kurve durch Integration über die Längenelemente zu berechnen.

Zudem kann man die Bogenelemente beim Integrieren unterschiedlich gewichten. Dabei entsteht eine Konstruktion, die lokal vom Typ „Bogenlänge mal Zahl“ ist.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Kurvenintegral erster Art (skalares Kurvenintegral)

Definition 10.11

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

das **skalare Kurvenintegral** oder **Kurvenintegral erster Art** von f .

Speziell mit $f = 1$ ergibt sich die **Länge** der Kurve γ über

$$L = \int_{t_a}^{t_e} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} \, dt.$$

Man kann zeigen, dass die so definierte Länge unabhängig von der Wahl der Parametrisierung einer Kurve ist.

Die Länge der Schraubenlinie

$$\gamma : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3t \end{bmatrix}$$

von S. 192 ergibt sich wegen

$$\gamma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 3 \end{bmatrix}$$

gemäß

$$L = \int_0^{6\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9} \, dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{10} \, dt = 6\sqrt{10} \pi.$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Beispiel

Eine besonders einfache Formel ergibt sich für ebene Kurven $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ und stetig differenzierbarer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Diese lassen sich in der Form

$$\gamma(x) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}, \quad a \leq x \leq b$$

parametrisieren, so dass

$$\gamma'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}.$$

Für die Bogenlänge gilt somit

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ -2 \sin t \end{bmatrix}.$$

(vgl. S. 193). Warum ergibt sich nicht einfach der Umfang eines Kreises mit Radius 2?

Berechnen Sie die Länge des Parabelbogens

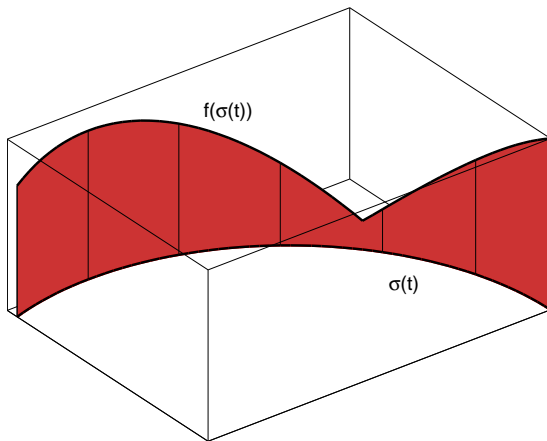
$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Hinweis: $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}))$.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Eine weitere geometrische Interpretation

Das skalare Kurvenintegral $\int_{\gamma} f \, ds$ über einer ebenen Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann man desweiteren als Fläche eines „Gartenzauns“ über dieser Kurve mit variabler Höhe visualisieren.



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

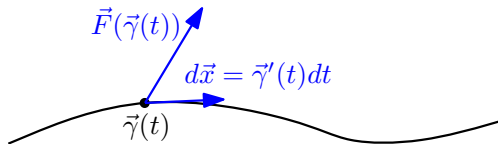
Kurvenintegral zweiter Art (Arbeitsintegral) und Potentialfelder

Eine weitere Möglichkeit, Kurvenintegrale zu definieren, ergibt sich mit der Verwendung eines Vektorfelds $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Integrand.

Lokal multipliziert man \mathbf{F} dabei skalar mit dem vекториellen Bogenelement $d\mathbf{x}$ und erhält eine Zahl

$$dW = \mathbf{F}(\gamma(t))^T d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\gamma(t))^T \gamma'(t) dt.$$

Als typische Anwendung integriert man ein Kraftfeld \mathbf{F} entlang eines Weges und erhält mit dW bzw. dem entstehende Integral $\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ die mechanische Arbeit.



Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Kurvenintegral zweiter Art (Arbeitsintegral) und Potentialfelder

Definition 10.12

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{F}(\gamma(t))^T \gamma'(t) \, dt$$

das **Kurvenintegral zweiter Art** oder **Arbeitsintegral** von \mathbf{F} entlang der Kurve γ .

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Kurvenintegral zweiter Art (Arbeitsintegral) und Potentialfelder

Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(x, y, z) := -mge_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

beschreibt die auf einen Körper mit Masse m nahe der Erdoberfläche wirkende Schwerkraft.

Man berechne

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

längs der Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 2(t-1)^2 \end{bmatrix}$$

(Herabgleiten auf „Parabelrutsche“). Wie groß ist die Endgeschwindigkeit, wenn die Masse aus der Ruhe startet und reibungsfrei rutscht?

In der Schulphysik haben Sie wahrscheinlich die mechanische Arbeit auf S. 204 einfach als Differenz der potentiellen Energie berechnet:

$$W = |\Delta E_{\text{pot}}| = m \cdot g |\Delta z| = 2mg.$$

Um das auch mathematisch zu verstehen, müssen wir den Begriff der Stammfunktion auf Vektorfelder verallgemeinern.

Kurze Erinnerung:

Zu einer stetigen reellen Funktion f hatten wir Stammfunktionen über die Beziehung $F' = f$ definiert. Verschiedene Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

für jede Stammfunktion F von f .

Definition 10.13

Sei $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Ein Skalarfeld $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, welches

$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \mathbf{F}$$

erfüllt, heißt **Potential** oder **Stammfunktion** von \mathbf{F} .

Gibt es zu einem Vektorfeld \mathbf{F} ein Potential, so nennt man \mathbf{F} ein **Potentialfeld**, **Gradientenfeld** oder auch **konservatives Feld**.

Zwei Potentiale zum gleichen Vektorfeld unterscheiden sich wieder nur um eine Konstante, solange man als Definitionsbereich zumindest eine „zusammenhängende“ offene Teilmenge des \mathbb{R}^n wählt.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals

Satz 10.14

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **stetiges** Potentialfeld mit Potential V . Dann gilt für jede komplett in U verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow U$:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = V(\gamma(t_e)) - V(\gamma(t_a)). \quad (10.4)$$

Das Kurvenintegral ist also in diesem Falle unabhängig vom gewählten Integrationsweg – es hängt lediglich vom Potential am Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals

Bestätigen Sie (10.4) durch Anwendung der Kettenregel sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf $\mathbf{F} \circ \gamma$. Beachten Sie, dass im HDI die Stetigkeit des Integranden vorausgesetzt wird.

Bestätigen Sie, dass im Beispiel von S. 204 durch

$$V(x, y, z) = -mgz$$

ein Potential zum Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = -mge_z$ gegeben ist.

Machen Sie sich klar, warum der Rechenweg aus der Schulphysik funktioniert.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals

Neben Satz 10.14 gilt noch wesentlich mehr:

Satz 10.15

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

Dann sind äquivalent:

- \mathbf{F} ist ein Potentialfeld.
- Das Integral

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

ist unabhängig vom gewählten Integrationsweg $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow U$.

Es hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ ab.

- Für alle **geschlossenen** Kurven $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow U$, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$, gilt

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integrabilitätsbedingung

Wie erkennt man aber, dass \mathbf{F} ein Potentialfeld ist? Wir analysieren dies am Fall $n = 2$:

Setzt man $\mathbf{F}(x, y)$ als stetig differenzierbar voraus, so gilt im Falle der Existenz eines Potentials $V(x, y)$:

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla V(x, y) = \begin{bmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Nach dem Satz von Schwarz ist die Hesse-Matrix von V ,

$$\begin{bmatrix} V_{xx}(x, y) & V_{xy}(x, y) \\ V_{yx}(x, y) & V_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x, y)^T \\ \nabla F_2(x, y)^T \end{bmatrix} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}),$$

symmetrisch und stimmt augenscheinlich mit der Jacobi-Matrix von \mathbf{F} überein.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integrabilitätsbedingung

Dies motiviert folgendes Ergebnis:

Satz 10.16

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobi-Matrix $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ symmetrisch ist.

Für $n = 2$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$, ergibt sich als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

und für $n = 3$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Vorsicht: Nimmt man aus dem Definitionsbereich \mathbb{R}^n von \mathbf{F} in obigem Satz auch nur einzelne Punkte heraus, wird der hinreichende Teil falsch.

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Integrabilitätsbedingung

Prüfen Sie anhand der Integrabilitätsbedingung, ob folgende Felder Potentialfelder sind:

- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = [xy, x]^T$,
- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = [y, x]^T$,
- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x, y, z) = -mge_z$ (vgl. S. 204).

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Berechnung von Potentialen

Nach Prüfung der Integrabilitätsbedingung möchte man das Potential natürlich auch *bestimmen*. Dies geschieht z. B. durch abwechselndes Integrieren und Differenzieren eines Ansatzes.

Wir illustrieren dies am Beispiel $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = [y, x]^T$.

Für ein Potential $V = V(x, y)$ von \mathbf{F} gilt

$$V_x(x, y) \stackrel{!}{=} F_1(x, y) = y.$$

Integration bezüglich x liefert

$$V(x, y) = xy + C(y).$$

Durch Differenzieren nach y erhält man

$$V_y(x, y) = x + C'(y) \stackrel{!}{=} x = F_2(x, y).$$

Somit gilt also

$$C'(y) = 0,$$

d.h. $C(y) = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$. Jedes Potential von \mathbf{F} ist also von der Form

$$V(x, y) = xy + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alternativ kann man die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals zur Bestimmung von V nutzen. Wir parametrisieren z.B. die geradlinige Verbindung zwischen $(0, 0)$ und einem gegebenen Punkt (x, y) gemäß

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix}.$$

Für diese Kurve γ gilt dann

$$\begin{aligned} V(x, y) - V(0, 0) &= \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} ty \\ tx \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{=\gamma'(t)} \, dt \\ &= \int_0^1 2txy \, dt \\ &= t^2xy \Big|_{t=0}^1 \\ &= xy. \end{aligned}$$

Setzt man $V(0, 0) = c$, so erhält man für das Potential wie gehabt

$$V(x, y) = xy + c.$$

10 Integralrechnung in mehreren Variablen

10.1 Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

10.2 Kurven und Kurvenintegrale

10.3 Oberflächen und Oberflächenintegrale

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Das Bild einer stetigen Funktion

$$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix},$$

ist eine **Fläche** im \mathbb{R}^3 .

D heißt **Parameterbereich**, u und v sind die **Parameter**, Φ ist eine **Parametrisierung** der Fläche (Flächen und ihre Parametrisierung werden hier mit demselben Symbol bezeichnet).

Neben dieser expliziten Parameterdarstellung kann eine Fläche auch implizit, also durch $F(x, y, z) = 0$ gegeben sein.

Die Fläche heißt [**stetig**] **differenzierbar**, wenn Φ (d.h. x , y und z) [**stetig**] differenzierbar sind.

Oberflächen und Oberflächenintegrale

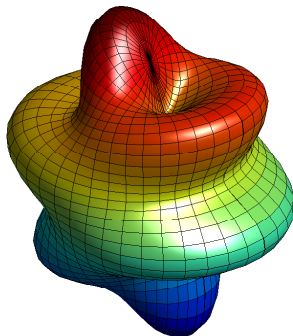
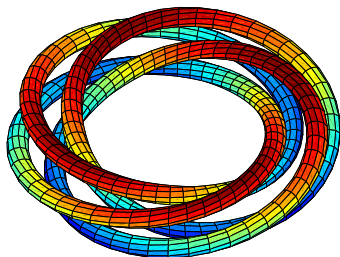
Flächen

Bekannt sind uns bereits Flächen vom Typ

$$z = f(x, y) \quad (\text{Graph einer Funktion } f : D \rightarrow \mathbb{R}).$$

Hier ist $\Phi(x, y) = [x, y, f(x, y)]^T$ ($(x, y) \in D$) eine Parametrisierung.

Flächen im \mathbb{R}^3 , die nicht Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ sind:



Oberflächen und Oberflächenintegrale

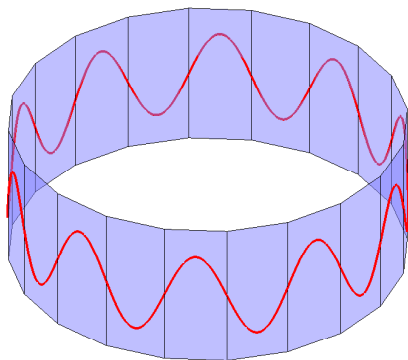
Flächenkurven

Sind die Parameter $u = u(t)$ und $v = v(t)$ stetige Funktionen einer Variablen $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, so ist

$$\sigma(t) = \Phi(u(t), v(t)) = \begin{bmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{bmatrix}$$

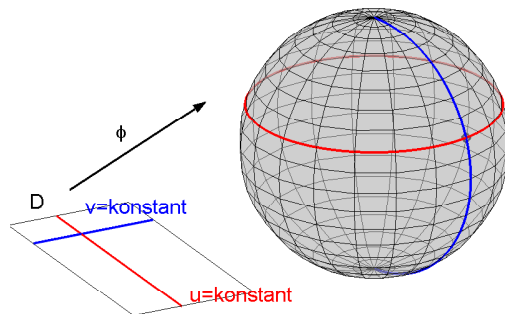
eine Kurve, die in der durch Φ definierten Fläche verläuft.

Man spricht von einer **Flächenkurve**.



Oberflächen und Oberflächenintegrale

Parameterlinien



Spezielle Kurven auf einer Fläche sind ihre **Parameterlinien**, bei denen ein Parameter konstant gehalten wird:

$$\Phi(u_0, v) \quad (u_0 \text{ konstant}, (u_0, v) \in D) \quad \text{und}$$

$$\Phi(u, v_0) \quad (v_0 \text{ konstant}, (u, v_0) \in D).$$

Die Fläche in der vorigen Abbildung ist die Einheitskugel:

$$\Phi : D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (u, v) \mapsto \begin{bmatrix} \cos(v) \sin(u) \\ \sin(v) \sin(u) \\ \cos(u) \end{bmatrix}.$$

Die Tangentenvektoren an die Parameterlinien im Punkt $\Phi(u_0, v_0)$ sind durch

$$\mathbf{t}_u(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{t}_v(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

gegeben. Sind die Vektoren \mathbf{t}_u und \mathbf{t}_v linear unabhängig ($\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v \neq \mathbf{0}$), so spannen sie die Tangentialebene der Fläche $\Phi(u, v)$ im Punkt $\Phi(u_0, v_0)$ auf:

$$\Phi(u_0, v_0) + \lambda \mathbf{t}_u(u_0, v_0) + \mu \mathbf{t}_v(u_0, v_0) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

In diesem Fall nennt man die Fläche **glatt** oder **regulär** in diesem Punkt.

Oberflächen und Oberflächenintegrale

Metrische Fundamentalgrößen

- Ist Φ injektiv auf D und für alle $(u_0, v_0) \in D$ in $\Phi(u_0, v_0)$ regulär, so heißt Φ eine reguläre Fläche. Eine **stückweise reguläre Fläche** setzt sich aus endlich vielen regulären Flächen zusammen.
- Sind $\Phi = \Phi(u, v)$ eine reguläre Fläche und $\sigma = \sigma(t) = \Phi(u(t), v(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, eine glatte Flächenkurve, so ist der Tangentenvektor an σ im Punkt $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$ durch

$$\sigma'(t_0) = \mathbf{t}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \mathbf{t}_v(u_0, v_0)v'(t_0)$$

gegeben (Kettenregel).

- Wir setzen

$$E(u, v) := \mathbf{t}_u(u, v)^T \mathbf{t}_u(u, v),$$

$$F(u, v) := \mathbf{t}_u(u, v)^T \mathbf{t}_v(u, v),$$

$$G(u, v) := \mathbf{t}_v(u, v)^T \mathbf{t}_v(u, v)$$

(**metrische Fundamentalgrößen** der Fläche). Diese Größen bestimmen die Länge von Kurven auf der Fläche und den Inhalt von Teilflächenstücken.

Die Bogenlänge von σ ist

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \int_{\alpha}^t \|\sigma'(s)\| \, ds \\ &= \int_{\alpha}^t \sqrt{[u'(s)]^2 E(\sigma(s)) + 2[u'(s)v'(s)]F(\sigma(s)) + [v'(s)]^2 G(\sigma(s))} \, ds.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des von \mathbf{t}_u und \mathbf{t}_v aufgespannten Parallelogramms ist

$$\|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}.$$

Der **Flächeninhalt** eines regulären Flächenstücks

$$\Phi = \Phi(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

wird definiert durch

$$O(\Phi) := \int_D \|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| \, du \, dv = \int_D \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \, du \, dv.$$

- Mit der Abkürzung

$$dO := \|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

(skalares Oberflächenelement) schreibt man oft $O(\Phi) = \int_{\Phi} dO$.

- Ist $f = f(\mathbf{x}) : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so heißt

$$\int_{\Phi} f(\mathbf{x}) \, dO := \int_D f(\Phi(u, v)) \|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

das **Oberflächenintegral** von f über Φ .

- Ist Φ stückweise regulär, d.h. Φ ist aus endlich vielen, (im Wesentlichen) disjunkten, regulären Flächenstücken Φ_j zusammengesetzt, dann:

$$\int_{\Phi} f(\mathbf{x}) \, dO := \sum_j \int_{\Phi_j} f(\mathbf{x}) \, dO.$$

Oberflächen und Oberflächenintegrale

Flächen vom Typ $z = f(x, y)$

Satz 10.17

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Die Fläche $z = f(x, y)$ besitzt die Parametrisierung

$$\Phi = \Phi(x, y) = [x, y, f(x, y)]^T \quad \text{mit } (x, y) \in D.$$

Die Tangentenvektoren an die Parameterlinien sind durch

$$\mathbf{t}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[1, 0, \frac{\partial f}{\partial x} \right]^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{t}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left[0, 1, \frac{\partial f}{\partial y} \right]^T$$

gegeben. Das Oberflächenintegral von $f : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig) ist

$$\int_{\Phi} f(\mathbf{x}) \, dO = \int_D f(\Phi(x, y)) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dx \, dy.$$

Oberflächen und Oberflächenintegrale

Rechenregeln für Oberflächenintegrale

Satz 10.18

Es seien Φ eine (stückweise) reguläre Fläche und $f, g : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gelten die folgenden Regeln:

$$\int_{\Phi} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) \, dO = \int_{\Phi} f(\mathbf{x}) \, dO + \int_{\Phi} g(\mathbf{x}) \, dO$$

$$\text{und} \quad \int_{\Phi} (\lambda f(\mathbf{x})) \, dO = \lambda \int_{\Phi} f(\mathbf{x}) \, dO \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Aus $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \Phi$ folgt

$$\int_{\Phi} f(\mathbf{x}) \, dO \leq \int_{\Phi} g(\mathbf{x}) \, dO.$$

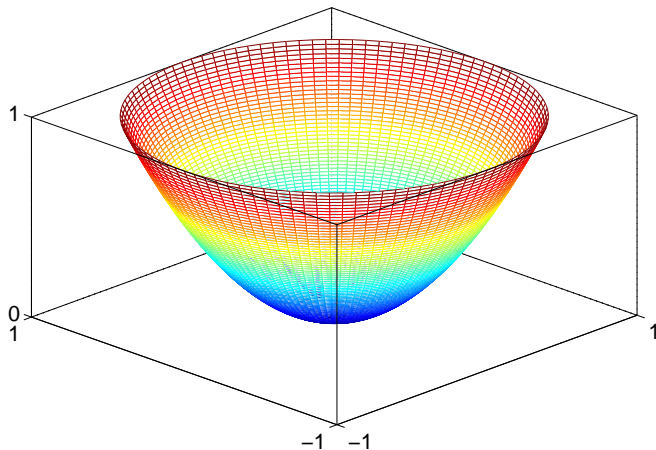
Ist $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ aus (stückweise) regulären Flächen zusammengesetzt, so dass $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$ aus endlich vielen glatten Kurven besteht, dann

$$\int_{\Phi} f(\mathbf{x}) \, dO = \int_{\Phi_1} f(\mathbf{x}) \, dO + \int_{\Phi_2} f(\mathbf{x}) \, dO.$$

Oberflächen und Oberflächenintegrale

Beispiel

Wir berechnen die Oberfläche eines Paraboloids:



Oberflächen und Oberflächenintegrale

Beispiel

Parametrisierung:

$$D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}, \quad \Phi(u, v) = [u, v, u^2 + v^2]^T.$$

Tangentenvektoren:

$$\mathbf{t}_u = [1, 0, 2u]^T, \quad \mathbf{t}_v = [0, 1, 2v]^T.$$

Metrische Fundamentalgrößen:

$$E(u, v) = 1 + 4u^2, \quad F(u, v) = 4uv, \quad G(u, v) = 1 + 4v^2.$$

$$\|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}.$$

Oberfläche:

$$O(\Phi) = \int_D \|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| \, du \, dv = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \, dv \, du$$

Oberflächen und Oberflächenintegrale

Beispiel

Parametrisierung:

$$D = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}, \quad \Phi(\rho, \phi) = [\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho^2]^T.$$

Tangentenvektoren:

$$\mathbf{t}_\rho = [\cos \phi, \sin \phi, 2\rho]^T, \quad \mathbf{t}_\phi = [-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0]^T.$$

Metrische Fundamentalgrößen:

$$E(\rho, \phi) = 1 + 4\rho^2, \quad F(\rho, \phi) = 0, \quad G(\rho, \phi) = \rho^2.$$

$$\|\mathbf{t}_\rho(\rho, \phi) \times \mathbf{t}_\phi(\rho, \phi)\| = \sqrt{E(\rho, \phi)G(\rho, \phi) - F^2(\rho, \phi)} = \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}.$$

Oberfläche:

$$\begin{aligned} O(\Phi) &= \int_D \|\mathbf{t}_\rho(\rho, \phi) \times \mathbf{t}_\phi(\rho, \phi)\| \, d\rho \, d\phi = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\phi \, d\rho \\ &= 2\pi \frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- die Zwischenziele von S. 139 erreicht haben,
- den Begriff des Riemann-Integrals im \mathbb{R}^n zumindest grob verstanden haben und für $n = 2, 3$ anschaulich deuten können,
- über 2D- und 3D-Normalbereiche sicher integrieren können,
- Substitutionen zumindest in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten sicher ausführen können,
- mit Kurven und deren Ableitungen sicher umgehen können,
- Bogenlänge und Arbeitsintegral sicher berechnen können,
- über Wegunabhängigkeit und Potentialfelder bescheidwissen,
- die Integrabilitätsbedingung sicher anwenden und Potentiale in einfachen Fällen berechnen können.