TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 17. Dezember 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Roman Unger, Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematik III (für Informatiker)

Wintersemester 2014/15

6. Übung: Fouriertransformation

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen. Es sei stets $a > 0$.

a) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ b) $f_2(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ c) $f_3(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ d) $f_4(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Faltungsfunktion $g(x) = f_1(x) * f_1(x)$ der Funktion f_1 aus Aufgabe 1 mit sich selbst und geben Sie ohne weitere Rechnung die Fouriertransformierte von g an.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) - y''(t) = \mathrm{e}^{-|t|}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe der Fouriertransformation. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Wenden Sie die Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung an und finden sie eine explizite Formel für die Fouriertransformierte $\hat{y}$ der Lösung y.

(b) Bestimmen Sie y aus $\hat{y}$ unter Verwendung des Faltungssatzes und den Ergebnissen der vorherigen Aufgaben.

Hinweis: Eine direkte Berechnung der inversen Fouriertransformation zur Bestimmung von y ist nicht notwendig.

Aufgabe 4

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = \exp\left(-\sigma^2 x^2\right), \qquad \sigma > 0.$$

Hinweis: Nutzen Sie eine quadratische Ergänzung, d.h., für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 + ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}, \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}.$$

(b) Wie könnte man – analog zu Eigenvektoren von Matrizen – *Eigenfunktionen* der Fouriertransformation definieren? Gibt es ein $\sigma > 0$, so dass obiges f zur Eigenfunktion wird?

Zusatzaufgabe

Berechnen Sie das Faltungsprodukt

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y) \mathrm{d}y$$

für $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ und $g(x) = \cos(\omega x)$ mit $a > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Nutzen Sie $\cos(x) = 0.5(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$.

Zusatzaufgabe

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{y}$ der Lösung y der folgenden Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 6y = \mathrm{e}^{-t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$