TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 5. Dezember 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Roman Unger, Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematik III (für Informatiker)

Wintersemester 2014/15

5. Übung: Fourierrreihen II

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fourierreihe von

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x, & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Nutzen Sie das Ergebnis und die Parsevalsche Gleichung zur Berechnung des Wertes der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \pi - x, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ist es günstiger f mit einer Kosinusreihe oder einer Sinusreihe zu approximieren? Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Geben Sie die gerade (d.h., $f(x) = f(-x)$) und ungerade (d.h., $f(x) = -f(-x)$) Fortsetzung von f auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ an.

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihen der beiden Fortsetzungen.

(c) Welche der beiden Reihen konvergiert schneller (im quadratischen Mittel)? Welche Reihe konvergiert punktweise, welche gleichmäßig?

Welchen Zusammenhang zwischen Glattheit der Funktion und Abklingen ihrer Fourierkoeffizienten stellen Sie fest?

Aufgabe 3

Aufbauend auf Aufgabe 1 ermitteln Sie die Funktion g, welche durch die Sinusreihe

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin((2k-1)x), \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

dargestellt wird.

Aufgabe 4

Die Fourierreihe einer Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

kann man auch mittels der komplexen Exponentialfunktion darstellen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

(a) In welchen Zusammenhang stehen die Koeffizienten a_k, b_k und c_k?

(b) Berechnen Sie mittels der komplexen Fourierreihe die Koeffizienten a_k, b_k der trigonometrischen Fourierreihe von

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Zusatzaufgabe

Setzen Sie die Funktion f aus Aufgabe 2 zu einer π-periodischen Funktion auf $[-\pi, \pi]$ (bzw. $\mathbb{R}$) fort und berechnen Sie deren Fourierreihe. Was können Sie hier bzgl. der Konvergenz der Reihe sagen?

Zusatzaufgabe

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils 2π-periodische Funktionen und es gelte

$$g(x) = f(x + \theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi),$$

sprich g ist eine Verschiebung von f. Wie verhalten sich die komplexen Fourierkoeffizienten von g zu denen von f?

Überprüfen Sie ihr Ergebnis anhand der Funktion f aus Aufgabe 4 des 4. Übungsblattes und der Sägezahnfunktion von Folie 168 der Vorlesung.