

**Mathematik III (für Informatiker)**  
Wintersemester 2014/15

4. Übung: Potenz- und Fourierreihen

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie Konvergenzradius und Konvergenzintervall zu folgenden Potenzreihen.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n^2)}$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$     e)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

**Aufgabe 2**

Entwickeln Sie die folgenden reellen Funktionen um die Stelle  $x_0 = 0$  in Potenzreihen, und geben Sie deren Konvergenzradius an.

a)  $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$     b)  $f_2(x) = 1 + x^2 + e^{2x}$     c)  $f_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$     d)  $f_4(x) = \ln(1+x)$

*Hinweis:* Nutzen Sie bekannte Potenzreihenentwicklungen.

**Aufgabe 3**

Geben Sie für folgende Potenzreihen die Summenfunktion sowie das Konvergenzintervall an.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$     b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$     d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$     e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$     f)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$   
g)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$     h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$

*Hinweis:* Nutzen Sie bekannte Potenzreihenentwicklungen.

**Aufgabe 4**

Durch

$$f(x) := \begin{cases} \pi + x, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0; \\ x - \pi, & \text{für } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

und

$$g(x) := x^2 \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

seien zwei  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Entwickeln Sie diese jeweils in eine Fourierreihe.

**Aufgabe 5**

Gegeben ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} \pi, & \text{für } -\pi < x \leq 0; \\ x, & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Ihre Fourierreihe werde mit  $\hat{f}(x)$  bezeichnet. Geben Sie  $\hat{f}(3\pi)$  und  $\hat{f}(4\pi)$  an.