

# Mathematik III

(für Informatiker)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2014/15



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
CHEMNITZ

① Differentialgleichungen

① Potenz- und Fourier-Reihen

## 10 Differentialgleichungen

## 11 Potenz- und Fourier-Reihen

### 11.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

### 11.2 Potenzreihen

### 11.3 Fourier-Reihen

- Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
- Funktionen mit beliebiger Periode
- Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
- Komplexe Darstellung
- Diskrete Fourier-Transformation
- Anwendung: Audio-Kompression

# Konvergenz von Funktionenfolgen

Im folgenden Kapitel soll es noch einmal um eindimensionale Analysis gehen. Speziell werden wir uns mit Folgen und Reihen (reeller) **Funktionen** auseinandersetzen.

## Definition 11.1

Eine Folge

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

von Funktionen

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nennen wir **Funktionenfolge** auf  $I$ .

**Notation:**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder kürzer  $(f_n)$ , analog zu Zahlenfolgen.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Punktweise Konvergenz

Wir suchen nach geeigneten Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen. Der Nahe-  
liegendste ist:

### Definition 11.2

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  auf  $I \subset \mathbb{R}$  heißt **punktweise konvergent** gegen die  
Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I, \quad (11.1)$$

d. h. wenn für jedes  $x \in I$  die **Zahlenfolge**  $(f_n(x))_n$  gegen  $f(x)$  konvergiert. Die  
Funktion  $f$  heißt **Grenzfunktion** von  $(f_n)$ .

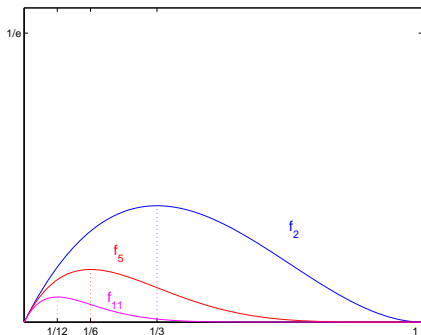
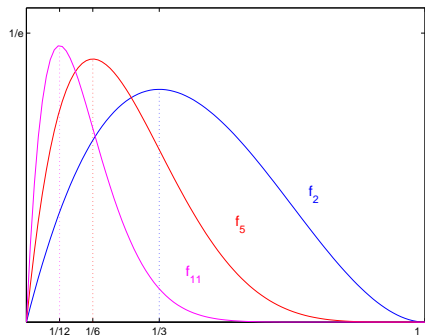
Äquivalent zu (11.1) ist die Aussage

$$|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{für alle } x \in I.$$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Punktweise Konvergenz, Beispiele und Probleme

Die Funktionenfolgen  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  (links) und  $f_n(x) = x(1-x)^n$  (rechts) konvergieren auf  $[0, 1]$  beide punktweise gegen  $f(x) = 0$ .



Am Beispiel der Funktionenfolge links erkennen wir bereits, dass trotz punktweiser Konvergenz auch für große  $n$  nicht **alle** Funktionswerte von  $f_n$  beliebig nahe bei Null liegen müssen.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Punktweise Konvergenz, Beispiele und Probleme

Punktweise Konvergenz ist generell eine recht schwache Eigenschaft.  
Beispielsweise kann folgendes passieren:

- Die Grenzfunktion  $f$  ist nicht stetig, obwohl es alle Folgenglieder  $f_n$  sind,
- Die Folge der Integrale  $\int_I f_n(x) \, dx$  konvergiert, aber nicht gegen das Integral  $\int_I f(x) \, dx$  über die Grenzfunktion.

Illustrieren Sie dies an folgenden Beispielen:

- $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n,$
- $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Gleichmäßige Konvergenz

Die Problemfälle von S. 134 haben gemeinsam, dass die Funktionswerte  $f_n(x)$  auch für große  $n$  nicht **gleichmäßig** nahe bei  $f(x)$  liegen.

Wir formulieren daher einen strengeren Konvergenzbegriff:

### Definition 11.3

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig konvergent** gegen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (11.2)$$

**Erinnerung:** Das Supremum  $\sup M$  einer beschränkten Menge  $M \subset \mathbb{R}$  ist deren kleinste obere Schranke. Falls das Maximum existiert, gilt  $\sup M = \max M$ .

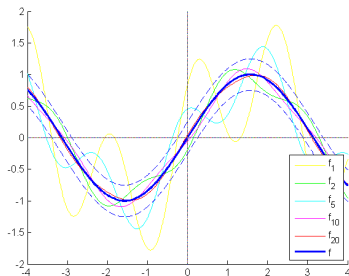


# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Beispiel

Die Funktionenfolge  $f_n(x) = \sin x + \frac{1}{n} \sin(3x + n)$  konvergiert auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f(x) = \sin x$ , denn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} |\sin(3x + n)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$



Gezeichnet sind einige Glieder der Funktionenfolge sowie deren Grenzfunktion.

Man beachte, dass ab einem bestimmten  $n$  (hier z.B.  $n \geq 5$ ) alle Funktionsgraphen komplett innerhalb eines beliebig dünnen „ $\epsilon$ -Schlauchs“ um die Grenzfunktion  $f$  verlaufen (blau gestrichelt).

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

### Satz 11.4

Konvergiert eine Funktionenfolge  $(f_n)$  auf einem Intervall  $I$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann konvergiert sie auch punktweise gegen  $f$ .

Gleichmäßige Konvergenz ist also „stärker“ als punktweise.

### Satz 11.5

Konvergieren zwei Funktionenfolgen  $(f_n)$  und  $(g_n)$  auf einem Intervall  $I$  gleichmäßig gegen  $f$  bzw.  $g$ , so konvergieren

- die Funktionenfolge  $(f_n \pm g_n)$  gleichmäßig gegen  $f \pm g$ ,
- die Funktionenfolge  $(\lambda f_n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , gleichmäßig gegen  $\lambda f$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

Die gleichmäßige Konvergenz behebt auch die „Mängel“ von S. 134:

### Satz 11.6

Ist  $(f_n)$  eine auf dem Intervall  $I$  gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion  $f$  auf  $I$  stetig.

### Satz 11.7

Ist  $(f_n)$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion  $f$  integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

Schließlich formulieren wir noch ein Ergebnis für die Ableitung bei gleichmäßiger Konvergenz:

### Satz 11.8

Ist  $(f_n)$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Folge differenzierbarer Funktionen mit Grenzfunktion  $f$ , und ist die abgeleitete Funktionenfolge  $(f'_n)$  auf  $[a, b]$  ebenfalls gleichmäßig konvergent, so ist  $f$  differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (\text{für alle } x \in [a, b]).$$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Funktionenreihen

Wie bei Zahlenfolgen kann man zu einer Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  eine Partialsummenfolge definieren:

$$f_0, \quad f_0 + f_1, \quad f_0 + f_1 + f_2, \quad \dots, \quad \sum_{k=0}^n f_k, \quad \dots$$

Diese Partialsummenfolge nennen wir auch **Reihe der Funktionen**  $f_k$ . Die Funktionen  $f_k$  heißen **Glieder** der Funktionenreihe.

**Notation:**  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  oder  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ , sowohl für die Reihe selbst als auch für deren Grenzwert, genau wie bei reellen Reihen.

**Beispiel:** Bereits bekannt ist die Funktionenreihe  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Gliedweises Integrieren und Differenzieren

Da Funktionenreihen spezielle Funktionenfolgen sind, kann man unsere Konvergenzbegriffe wie auch die Sätze 11.4 - 11.8 direkt übertragen.

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent auf  $[a, b]$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f$ .

Dann gelten:

- Sind alle Reihenglieder  $f_k$  stetig, so ist auch die Summenfunktion  $f$  stetig, und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) \, dx.$$

- Sind alle  $f_k$  differenzierbar, und konvergiert die abgeleitete Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$  gleichmäßig auf  $[a, b]$ , dann ist auch die Summe  $f$  differenzierbar und

$$f'(x) = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right]' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x).$$

## 10 Differentialgleichungen

## 11 Potenz- und Fourier-Reihen

### 11.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

### 11.2 Potenzreihen

### 11.3 Fourier-Reihen

- Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
- Funktionen mit beliebiger Periode
- Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
- Komplexe Darstellung
- Diskrete Fourier-Transformation
- Anwendung: Audio-Kompression

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Potenzreihen

Bei diesen Funktionenreihen wählt man als Glieder Funktionen vom Typ

$$f_k(x) = a_k(x - x_0)^k.$$

Als Teilsummen entstehen Polynome  $n$ -ten Grades:  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$ .

### Definition 11.9

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad (x, x_0, a_k \in \mathbb{R}) \quad (11.3)$$

heißt **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt**  $x_0$  und **Koeffizienten**  $a_k$ .

Die berühmteste Potenzreihe kennen Sie bereits:  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ .

Sie besitzt den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , die Koeffizienten  $a_k = \frac{1}{k!}$  und konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .



# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Konvergenzverhalten

Wir untersuchen nun das Konvergenzverhalten von (11.3) in Abhängigkeit von  $x$ , während  $a_k$  und  $x_0$  fest gehalten werden.

### Satz 11.10 (von Cauchy-Hadamard\*)

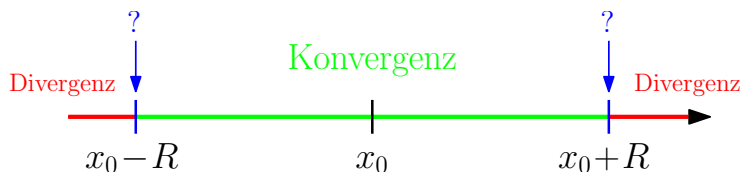
Zu jeder Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  gibt es einen **Konvergenzradius**  $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$  mit folgenden Eigenschaften:

- Die Potenzreihe konvergiert (absolut) für  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .
- Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall  $I \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ .
- Die Potenzreihe divergiert außerhalb  $[x_0 - R, x_0 + R]$  (nur sinnvoll für  $R \neq \infty$ ).

\* Jacques Hadamard, 1865-1963, französischer Mathematiker

# Konvergenz von Funktionenfolgen

Prinzipiskizze zum Konvergenzverhalten



- Das Intervall  $(x_0 - R, x_0 + R)$  wird auch **Konvergenzintervall** der Potenzreihe genannt.
- Das Konvergenzverhalten an den kritischen Punkten  $x_0 - R$  und  $x_0 + R$  muss immer gesondert untersucht werden.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Berechnung des Konvergenzradius

### Satz 11.11

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Dann gilt:

- $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ , falls fast alle  $a_k$  von Null verschieden sind, und dieser Grenzwert existiert,
- $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ , falls der Grenzwert im Nenner existiert. Dabei sind die Konventionen „ $\frac{1}{\infty} = 0$ “ und „ $\frac{1}{0} = \infty$ “ zu treffen.

**Beweisidee:** Quotienten- bzw. Wurzelkriterium für Zahlenreihen.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Beispiel

Der Konvergenzradius von  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist  $\infty$ . Tatsächlich ergibt sich mit dem erstgenannten Kriterium

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty.$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}.$$

Vergessen Sie nicht, die Randpunkte des Konvergenzintervalls zu untersuchen.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Gliedweises Differenzieren und Integrieren

Die Ergebnisse von S. 141 gelten natürlich auch für Potenzreihen. Es gilt sogar

### Satz 11.12

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  besitze den Konvergenzradius  $R > 0$ . Die Funktion

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

besitzt dann folgende Eigenschaften:

- $f$  ist stetig.
- $f$  ist auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $(x_0 - R, x_0 + R)$  integrierbar, wobei

$$\int f(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C.$$

- $f$  ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}, \quad \text{usw.}$$

Insbesondere ist  $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Beispiel

Aus der Summenformel für die geometrische Reihe erhält man für

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

die Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Durch gliedweises Differenzieren (Satz 11.12, Punkt 3) erhält man für die Ableitung die Darstellung

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Wie lautet die Potenzreihendarstellung zu  $F(x) = \ln(1-x)$  ( $x_0 = 0$ ,  $|x| < 1$ )?

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Darstellbarkeit durch Potenzreihen

Es stellt sich die Frage, wann z. B. eine unendlich oft differenzierbare Funktion als Potenzreihe geschrieben („in eine Potenzreihe entwickelt“) werden kann.

Aus der Formel in der letzten Zeile von Satz 11.12 ergibt sich, dass für die Koeffizienten **immer**

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

gelten muss. Die aus Abschnitt 4.6 bekannte **Taylor-Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

ist also der einzige Kandidat für eine mögliche Potenzreihendarstellung von  $f$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Warnungen

Leider gibt es unendlich oft differenzierbare Funktionen, die man nicht als Potenzreihen schreiben kann. Es kann vorkommen, dass

- die Taylor-Reihe den Konvergenzradius  $R = 0$  besitzt, d. h. nur für  $x = x_0$  konvergiert.
- die Taylor-Reihe durchaus konvergiert ( $R > 0$ ), aber nicht gegen die Funktion  $f$  (!!). Ein prominentes Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{für } x \neq 0; \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

für die  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Die Taylorreihe ist somit die konstante Funktion  $\tilde{f} = 0$  und hat mit  $f$  nichts zu tun.



# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Darstellbarkeit durch Potenzreihen

Wann genau eine unendlich oft differenzierbare Funktion  $f$  durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird, ist schwierig zu charakterisieren.

Wir begnügen uns mit einer hinreichenden Bedingung:

### Satz 11.13

Die Funktion  $f : I = (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$  sei unendlich oft differenzierbar. Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r^k}{k!} \max_{x \in I} |f^{(k+1)}(x)| = 0,$$

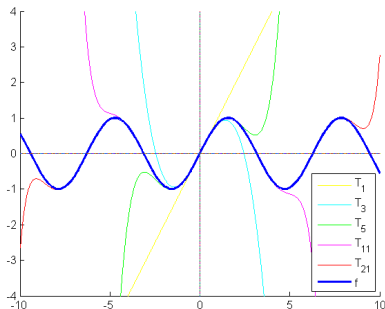
so besitzt die Taylor-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  den Konvergenzradius  $R \geq r$ , und es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in I.$$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Darstellbarkeit durch Potenzreihen

Man bestimme die Taylorreihe zu  $f(x) = \sin x$  ( $x_0 = 0$ ). Wie verhält es sich mit der Konvergenz? Könnte man diese Potenzreihe auch aus der Formel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  erhalten?



Die Funktion  $f(x) = \sin x$  und einige ihrer Taylorpolynome  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Rechnen mit Potenzreihen

Schließlich kann man Potenzreihen gliedweise addieren und in Produkten von Potenzreihen wie bei endlichen Summen ausmultiplizieren:

### Satz 11.14

Für Summe und Produkt zweier Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$  gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x - x_0)^k$$

bzw.

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$$

mit  $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

Rechnen mit Potenzreihen, Beispiel

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \frac{x^9}{22680} + \dots \end{aligned}$$

Bestätigen Sie mindestens die ersten vier Summanden durch detaillierte Rechnung.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Division von Potenzreihen

Will man die Koeffizienten von

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k}$$

berechnen, formt man zunächst um:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

und führt dann einen Koeffizientenvergleich durch.

Mit Hilfe von

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

berechne man die ersten fünf Koeffizienten der Potenzreihe zu  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  ( $x_0 = 0$ ).

## 10 Differentialgleichungen

## 11 Potenz- und Fourier-Reihen

11.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

11.2 Potenzreihen

11.3 Fourier-Reihen

- Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
- Funktionen mit beliebiger Periode
- Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
- Komplexe Darstellung
- Diskrete Fourier-Transformation
- Anwendung: Audio-Kompression

- Die nach dem französischen Mathematiker, Physiker, Ägyptologe und Revolutionär Joseph Fourier (1768–1830) benannte **Fourier-Analyse** ist ein Grundpfeiler der angewandten Mathematik.
- Neben vielfältigen physikalischen Entdeckungen (Wärmelehre) ist Fourier für seine Entdeckung bekannt, dass – selbst un stetige – Funktionen als Überlagerung (Linearkombination, konvergente Reihe) der Funktionen

$$1, \quad \cos(kx), \sin(kx) \quad (k \in \mathbb{N})$$

dargestellt werden können.

- In vielen Anwendungen sind die Koeffizienten für große  $k$  vernachlässigbar klein. Dies gestattet es, Signale in ihre Wellenanteile zu zerlegen, und sie dann zu übermitteln, komprimieren, filtern, entrauschen, analysieren, klassifizieren oder verschlüsseln.
- Die strenge mathematische Begründung der Konvergenz von Fourier-Reihen dauerte bis in die 1960er Jahre (Carleson-Hunt-Theorem).



Joseph Fourier

Wir betrachten Reihendarstellungen für periodische Funktionen, zunächst speziell für  $2\pi$ -periodische Funktionen\*. Als Reihenglieder verwenden wir Funktionen, die selbst  $2\pi$ -periodisch sind:

## Definition 11.15

Eine Reihe der Bauart

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (11.4)$$

mit reellen Konstanten  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt **trigonometrische Reihe**.

Sind alle  $a_k = 0$ , spricht man von einer **Sinusreihe**.

Sind alle  $b_k = 0$ , spricht man von einer **Kosinusreihe**.

Eine Teilsumme (bis zum Index  $k = n$ ) heißt **trigonometrisches Polynom** (vom Grad  $n$ ).

\***Zur Erinnerung:** Das bedeutet  $f(x + 2\pi) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .



Wir gehen zunächst von einer gegebenen trigonometrischen Reihe aus und bemerken:

### Satz 11.16

Ist die trigonometrische Reihe (11.4) für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent, so ist

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (11.5)$$

eine auf  $\mathbb{R}$  definierte  $2\pi$ -periodische Funktion.

Es macht also umgekehrt nur für  $2\pi$ -periodische Funktionen Sinn, nach Darstellungen der Form (11.5) zu suchen. Für Funktionen wie  $g(x) = x^2$  oder  $h(x) = e^x$  ist dies dagegen zwecklos (es sei denn, man betrachtet die periodische Fortsetzung eines endlichen Abschnitts solcher nichtperiodischer Funktionen).

Der folgende Satz liefert u. a. den Schlüssel zur Berechnung der gesuchten Reihendarstellungen:

### Satz 11.17

Sind die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  absolut konvergent, so konvergiert die trigonometrische Reihe (11.4) punktweise auf ganz  $\mathbb{R}$ . Die Summenfunktion

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

ist dann stetig auf  $\mathbb{R}$ , und es gelten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}).$$

# Fourier-Reihen

Hintergrund: Orthogonalitätsrelationen in  $L^2(-\pi, \pi)$

Um die Darstellungen in (11.6) zu erhalten, versieht man den Raum  $L^2(-\pi, \pi)$  aller Funktionen  $f$  mit  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty^*$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx. \quad (11.7)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Funktionen  $\sin(nx)$  und  $\cos(mx)$  ( $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ ) diesbezüglich ein Orthonormalsystem bilden, d.h.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ 1, & \text{falls } n = m, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0).$$

Die Darstellung (11.6) der Koeffizienten ergibt sich damit wie in Satz 7.29 aus

$$a_k = \langle f(\cdot), \cos(k \cdot) \rangle \quad \text{und} \quad b_k = \langle f(\cdot), \sin(k \cdot) \rangle.$$

Dieses Orthonormalsystem ist darüberhinaus **vollständig**, d.h. nur die Nullfunktion ist orthogonal zu allen darin enthaltenen Funktionen. Ein solches vollständiges Orthonormalsystem heißt auch **Orthonormalbasis** der Hilbert-Raumes  $L^2(-\pi, \pi)$ .

Wir untersuchen nun für eine **vorgegebene**  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$ , ob sie sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln lässt.

### Definition 11.18

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische, auf  $[-\pi, \pi]$  integrierbare Funktion. Dann heißen die Zahlen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}),$$

**Fourier-Koeffizienten** von  $f$ . Die Reihe

$$R_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

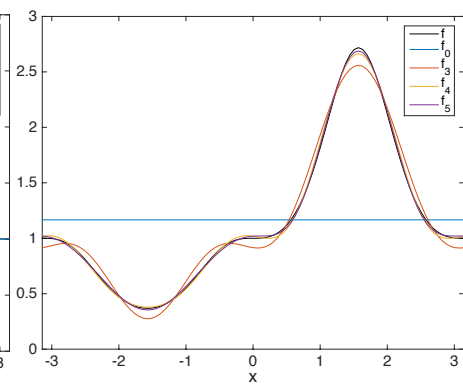
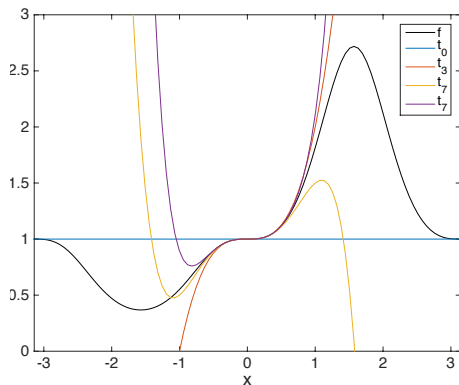
heißt **Fourier-Reihe** von  $f$ .

# Fourier-Reihen

## Taylor-Entwicklung vs. Fourier-Reihe

**Beispiel:** Wir vergleichen die Taylor-Entwicklung an der Stelle  $x_0 = 0$  (links) mit der Fourier-Reihe (rechts) der ( $2\pi$ -periodischen) Funktion

$$f(x) = \exp(\sin^3 x)$$



Da die Integranden die Periode  $2\pi$  haben, kann auch jedes andere Intervall der Länge  $2\pi$  als Integrationsbereich verwendet werden.

Das konkrete Rechnen erleichtert häufig:

### Satz 11.19

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische, in  $[-\pi, \pi]$  integrierbare, und auf  $(-\pi, \pi)$  gerade [ungerade] Funktion, dann ist die Fourier-Reihe von  $f$  eine Kosinusreihe [eine Sinusreihe].

Man berechne die Fourier-Reihe zum **Rechteckpuls**

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{für } |x| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{für } \pi/2 \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Wie bei den Taylor-Reihen stellen sich nun folgende Fragen:

- Wann konvergiert die Fourier-Reihe  $R_f(x)$ ?
- Falls sie konvergiert – unter welchen Bedingungen gilt dann auch  $R_f(x) = f(x)$ ?

Zur Beantwortung brauchen wir einen weiteren Begriff:

### Definition 11.20

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $[a, b]$  **stückweise glatt**, wenn es eine Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  von  $[a, b]$  gibt, so dass  $f$  auf jedem der Teilintervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  stetig differenzierbar ist.

### Satz 11.21

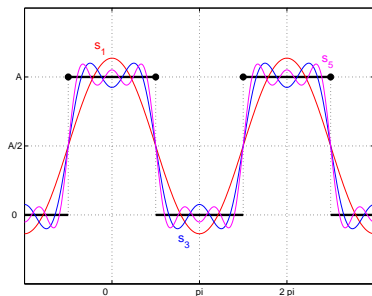
Ist die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise glatt auf  $[-\pi, \pi]$ , so konvergiert ihre Fourier-Reihe  $R_f$  punktweise auf  $\mathbb{R}$ . Dabei gilt

$$R_f(x_0) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right] \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Ist  $f$  stetig in  $x_0$ , so folgt insbesondere  $R_f(x_0) = f(x_0)$ .

### Beispiel:

Teilsummen der Fourierentwicklung zum Rechteckpuls, vgl. Bsp. S. 165.





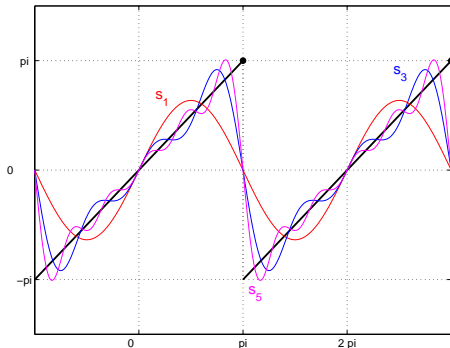
# Fourier-Reihen

## Weiteres Beispiel

Für die **Sägezahnfunktion**  $f(x) = x$  ( $|x| \leq \pi$ ) ergibt sich

$$a_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0) \quad \text{sowie} \quad b_k = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Auch hier stellen wir die ersten Teilsommen dar:

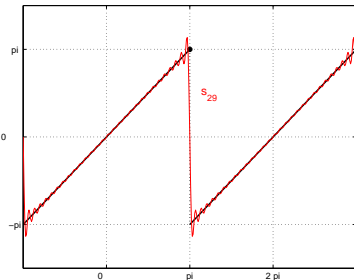
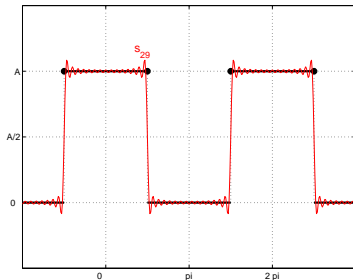


**Anmerkung:** Tabellen wichtiger Fourierreihen findet man in gängigen Tafelwerken, z. B. Merziger et al., S. 78 ff.

# Fourier-Reihen

## Exkurs: Gibbssches Phänomen\*

Wir betrachten die Teilsummen  $s_{29}$  für Rechteckpuls und Sägezahnfunktion:



In einer kleinen Umgebung der Sprungstelle „überschwingen“ die Partialsummen  $s_n$  um etwa 9% der Sprunghöhe („overshoot“).

Dieses **Gibbsche Phänomen** verschwindet nicht für  $n \rightarrow \infty$ , bewegt sich aber näher an die Sprungstelle.

\* Josiah Willard Gibbs, 1839-1903, US-amerikanischer Physiker

Ein typisches Problem, welches durch Überschwingen verursacht wird, sind Artefakte im JPG-Bildformat in der Nähe scharfer Kanten.



Grund ist u. a. die Verwendung einer Kosinustransformation im Kompressionsalgorithmus, die ganz ähnliche Eigenschaften wie die Fouriertransformation aufweist.

Insbesondere für qualitativ hochwertige Balkengrafiken und Diagramme ist JPG daher ein denkbar ungeeignetes Format.

# Fourier-Reihen

## Fourier-Entwicklung von Funktionen mit beliebiger Periode

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodisch mit Periode  $T$ , bestimmt man die

$$\text{Kreisfrequenz } \omega := \frac{2\pi}{T}$$

und entwickelt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)],$$

wobei

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_s^{s+T} f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_s^{s+T} f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$\text{sowie } b_j = \frac{2}{T} \int_s^{s+T} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Man nennt  $\omega$  die Kreisfrequenz der Grundschwingung und  $k\omega$  ( $k > 1$ ) die Kreisfrequenzen der harmonischen Oberschwingungen. Die Zahl  $s \in \mathbb{R}$  ist beliebig.

# Fourier-Reihen

## Besselsche Ungleichung und Gleichung

### Satz 11.22

Für jede Funktion  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  mit den Fourier-Koeffizienten  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (11.8)$$

Aus der Vollständigkeit unserer Orthonormalbasis  $\{\cos(kx), k \in \mathbb{N}_0; \sin(kx), k \in \mathbb{N}\}$  folgt aus der Besselschen Ungleichung für  $n \rightarrow \infty$

### Satz 11.23

Für jede Funktion  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  mit den Fourier-Koeffizienten  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (11.9)$$

Die (11.9) (eigentlich bereits (11.8)) zeigt, dass die Fourier-Koeffizienten von  $L^2$ -Funktionen Nullfolgen bilden.

### Satz 11.24

Die Fourier-Reihe einer stetigen, stückweise glatten  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  konvergiert gleichmäßig und absolut gegen  $f$ . Für ihre Fourier-Koeffizienten  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergieren ferner die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|, \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

Mit der Definition der **Supremumsnorm** auf einem reellen Intervall  $I$

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in I} |f(x)|$$

und der Bezeichnung  $R_f^n(x)$  für die  $n$ -te Teilsumme der Fourier-Reihe einer Funktion  $f$  lässt sich die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe gegen  $f$  ausdrücken als

$$\|f - R_f^n\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad n \rightarrow \infty.$$

# Fourier-Reihen

## Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel

Eine weitere Norm für Funktionen auf  $[-\pi, \pi]$  ist die zum Skalarprodukt (11.7) gehörende  **$L^2$ -Norm**

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Konvergenz in dieser Norm bezeichnet man als **Konvergenz im quadratischen Mittel**.

### Satz 11.25

Die Fourier-Reihe einer Funktion  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f$ .

# Fourier-Reihen

## Approximation quadratischen Mittel

Die Teilsummen  $R_f^n$  der Fourier-Reihe einer Funktion  $f$  bilden ein trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$ . Jede dieser Teilsummen besitzt die Optimalitätseigenschaft, dass sie die unter allen trigonometrischen Polynomen von Grad  $n$

$$T_n(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n [\tilde{a}_k \cos(kx) + \tilde{b}_k \sin(kx)]$$

die Funktion  $f$  in der  $L^2$ -Norm am besten approximieren:

### Satz 11.26

Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  wird der Quadratmittelfehler

$$\|f - T_n\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

genau dann minimal, wenn  $T_n = R_f^n$ . Ferner gilt

$$\|f - R_f^n\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$



# Fourier-Reihen

## Gliedweise Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit

- Die Fourier-Reihe einer stetigen, stückweise glatten periodischen Funktion ist gliedweise integrierbar (gleichmäßige Konvergenz).
- Für die gliedweise Differenzierbarkeit muss auch die Reihe der Ableitungen gleichmäßig konvergieren.
- Dies ist oft nicht erfüllt, etwa bei der Modellierung unstetiger oder nichtdifferenzierbarer periodischer Vorgänge.

Wann kann eine Fourier-Reihe dennoch gliedweise integriert/differenziert werden?  
Für die Integration gilt

### Satz 11.27

Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe  $R(x)$  kann gliedweise integriert werden und es gilt

$$F(x) := \int_0^x R(t) dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k},$$

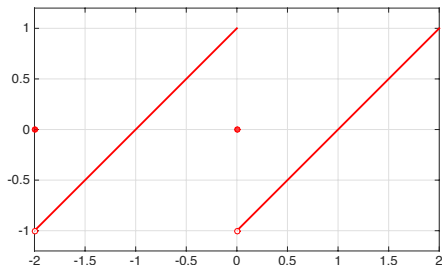
wobei die Reihe gleichmäßig für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $F(x)$  konvergiert.

**Beispiel:** Ungerade fortgesetzte 2-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Fourier-Reihe

$$R_f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x)}{k}$$



konvergiert an allen Stetigkeitsstellen, also insbesondere in  $(0, 2)$ , **punktweise** gegen  $f(x) = x - 1$ . Die Ableitungsreihe

$$R_{f'}(x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi x)$$

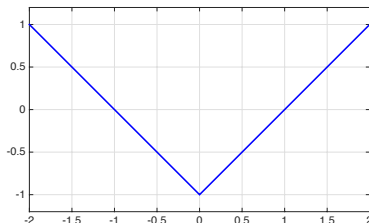
divergiert an der Stelle  $x = 1$ , obwohl  $f$  dort stetig, sogar differenzierbar ist.

**Beispiel:** Gerade und stetig fortgesetzte 4-periodische Funktion

$$\tilde{f}(x) = |x| - 1.$$

Fourier-Reihe

$$R_{\tilde{f}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$$



Ableitungsreihe

$$R_{\tilde{f}'}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}x\right)}{2k-1}$$

konvergiert (Leibniz-Kriterium) an der Stelle  $x = 1$  gegen  $\tilde{f}'(1) = 1$ .

### Satz 11.28

Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe, die eine Funktion  $f$  darstellt, kann man nur dann gliedweise an einer Stelle  $x$  differenzieren, wenn die Ableitungsreihe im Punkt  $x$  konvergent ist. Im Fall der Konvergenz stellt die Ableitungsreihe  $f'(x)$  dar. Hinreichend für die Konvergenz der Ableitungsreihe ist die Stetigkeit und die stückweise stetige Differenzierbarkeit von  $f'$ .

Periodische Funktionen mit Werten in den komplexen Zahlen lassen sich ebenfalls in einer Fourier-Reihe entwickeln. Aufgrund der Beziehung zwischen der Sinus-, Kosinus- und Exponentialfunktion besitzt die komplexe Schreibweise sogar eine einfachere Form als jeweils eine reelle Fourier-Reihe für Real- und Imaginärteil.

Besitzt die stückweise glatte  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

so lassen sich Sinus und Kosinus vermöge der Eulerschen Formel ausdrücken durch

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

und wir erhalten nach Einsetzen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right]. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$b_0 := 0, \quad a_{-k} := a_k, \quad b_{-k} := -b_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (11.10)$$

sowie  $c_k := (a_k - ib_k)/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , und erhalten

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (11.11)$$

wobei der Grenzwert als  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx}$  zu verstehen ist.

- Durch Multiplikation von (11.11) mit  $e^{-inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , Integration über  $[-\pi, \pi]$ , Vertauschung von Integration und Summation erhält man die komplexe Darstellung der Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (11.12)$$

- Formel (11.12) gilt unter denselben Voraussetzungen wie die entsprechenden Formeln für  $a_k$  und  $b_k$ .
- Für die Rückrechnung erhalten wir

$$a_k = 2 \operatorname{Re} c_k, \quad b_k = -2 \operatorname{Im} c_k \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- An (11.10) erkennt man sofort, dass für reelle Funktionen  $f$  gilt  $c_k = \overline{c_{-k}}$ .
- Die Konvergenzsätze 11.21 und 11.24 gelten unverändert für die komplexe Darstellung.

Oft ist es praktischer, auch bei der Modellierung reellwertigen periodischer Funktionen  $f = f(t)$  direkt die komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

mit einer Kreisfrequenz  $\omega > 0$  anzusetzen. So lassen sich etwa die Fourier-Reihe einer phasenverschobene Schwingungen  $g(t) = f(t - t_0)$  leicht darstellen als

$$g(t) = f(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{[c_k e^{-ik\omega t_0}]}_{=: \tilde{c}_k} e^{ik\omega t},$$

was mit der trigonometrischen Variante deutlich umständlicher ginge.



Außer bei der Feststellung, dass bei reellen Funktionen die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k = \overline{c_{-k}}$  erfüllen, wurde bisher an keiner Stelle verwendet, dass die betrachteten Funktionen reellwertig sind. Wir können daher viele der hergeleiteten Ergebnisse auf periodische Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

übertragen.

Bei den Integralformeln für die Koeffizienten  $c_k$  ist lediglich zu beachten, dass Real- und Imaginärteile für sich integriert werden, d.h.

$$\int f(t) dt = \int \operatorname{Re} f(t) dt + i \int \operatorname{Im} f(t) dt$$

### Satz 11.29 (Rechenregeln)

Sind  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zwei  $T$ -periodische, stückweise glatte Funktionen mit den Fourier-Reihen  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\omega t}$  und  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\omega t}$  mit  $\omega = 2\pi/T$ , so gelten

- (1)  $\alpha f + \beta g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha f_k + \beta g_k) e^{ik\omega t}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . (Linearität)
- (2)  $\overline{f(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{f_{-k}} e^{ik\omega t}$ , (Konjugation)
- (3)  $f(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{-k} e^{ik\omega t}$ , (Zeitumkehr)
- (4)  $f(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\alpha\omega t}$ , (Streckung, Ähnlichkeit)
- (5)  $f(t + \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{ik\omega\tau} f_k) e^{ik\omega t}$ , (Translation, Phasenverschiebung)
- (6)  $e^{in\omega t} f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k-n} e^{ik\omega t}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . (Translation im Frequenzbereich)

Verbindung zu  $2\pi$ -periodische Funktionen: Besitzt  $f$  die Periode  $T$ , so besitzt  $F(t) := f(\frac{t}{\omega})$  die Periode  $2\pi$ .

### Satz 11.30

Sind  $f$  und  $g$  zwei  $T$ -periodische, stückweise stetige Funktionen mit den Fourier-Reihen  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\omega t}$  und  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\omega t}$ , so gelten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \overline{g_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (11.13)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad (\text{Parsevalsche Gleichung}). \quad (11.14)$$

- Aus (11.14) folgt für reellwertige Funktionen die schon behandelte reelle Version der Parsevalschen Gleichung (11.9).
- Die Verbindung zwischen (11.14) und (11.9) ergibt sich durch Einsetzen der Beziehung  $c_k = (a_k - ib_k)/2$  und Zusammenfassung der Summanden mit Indices  $k$  und  $-k$ .

- In technischen Anwendungen liegen Funktionen (Signale) typischerweise nicht in kontinuierlicher Form vor, sondern als diskrete Messwerte oder als digitale Daten.
- Da die Abtastrate oft gleichabständig ist gehen wir von einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f = f(x)$  aus, für die die Funktionswerte  $y_j = f(x_j)$  an den  $N + 1$  Punkten

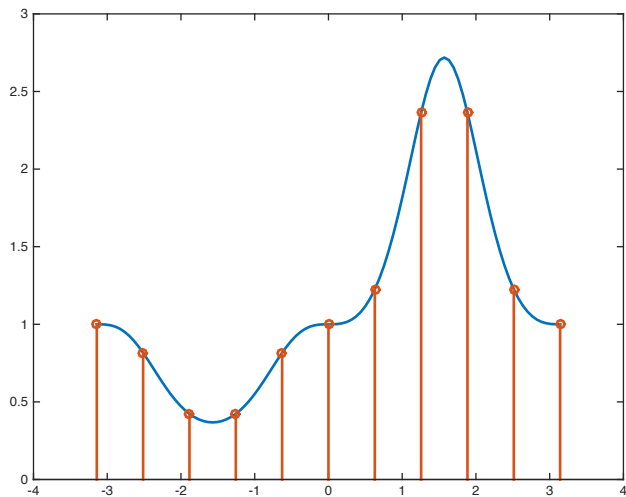
$$x_j = j \cdot \frac{2\pi}{N}, \quad j = 0, \dots, N$$

gegeben sind. Aufgrund der Periodizität gilt  $y_0 = y_N$ .

- Dabei ist es eigentlich egal, ob die Funktionswerte  $\{y_j\}_{j=0}^N$  nur als Messwerte oder durch Auswertung einer expliziten Formel für  $f$  an den Stützstellen  $x_j$  entstanden sind.
- Ziel ist es nun, die diskreten Werte in analoger Weise durch eine geeignete Orthogonalbasis darzustellen und ggf. durch Abschneiden zu approximieren.

# Fourier-Reihen

## Diskrete Fourier-Transformation



### Definition 11.31

Die **Fourierkoeffizienten eines Vektors**  $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^N$  sind die Zahlen

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-jk \frac{2\pi i}{N}} =: \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \bar{w}^{jk}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (11.15)$$

mit der  $N$ -ten Einheitswurzel  $w = w_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ .

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten des ersten Einheitsvektors

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{C}^N.$$

# Fourier-Reihen

## Diskrete Fourier-Transformation: Approximation von Integralen

Betrachtet man die Komponenten des Vektors  $\mathbf{y}$  als Werte einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem uniformen Gitter  $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ , so lassen sich die Fourier-Koeffizienten eines Vektors als Approximation der Fourier-Koeffizienten von  $f$  interpretieren.

Wir betrachten hierzu die **Trapezregel** zur Approximation des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Ist  $f \in C^2[a, b]$  und  $M := \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ , so gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M.$$

Zusammengesetzte Trapezregel: Zerlegung des Integrationsintervalls  $[a, b]$  in  $n$  äquidistante Teilintervalle

$$[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n], \quad x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

und Anwendung der Trapezregel auf jedes Teilintervall:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right] . =: T(h)$$

Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - T(h) \right| \leq \frac{b-a}{12} M h^2.$$



# Fourier-Reihen

Diskrete Fourier-Koeffizienten als Approximation der kontinuierlichen Fourier-Koeffizienten

Sind  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$  und  $g$  eine periodische Funktion auf  $[0, 2\pi]$ , so kann man diese Approximation auf jedem Teilintervall

$$[x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N-1,$$

anwenden und erhält

$$\int_0^{2\pi} g(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x) dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2} [g(x_j) + g(x_{j+1})] = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j).$$

Auf den Integranden

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx}$$

der (kontinuierlichen) Fourier-Koeffizienten angewandt erhält man, mit  $y_j = f(x_j)$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-jk \frac{2\pi i}{N}} = c_k, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Die Definition aller  $N$  Fourier-Koeffizienten eines Vektors  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  kann man in Vektorschreibweise zusammenfassen als

$$\mathbf{c} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}_N} \mathbf{y},$$

wobei

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

### Satz 11.32

Die **Fourier-Matrix**  $\mathbf{F}_N$  ist invertierbar mit inverser Matrix gegeben durch

$$\mathbf{F}_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}_N}.$$

### Definition 11.33

Die Abbildung, welche einem Vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  den in (11.15) definierten Vektor  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^N$  zuordnet, heißt **diskrete Fourier-Transformation** DFT :  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{c}$ . Die Umkehrabbildung heißt **inverse diskrete Fourier-Transformation** (IDFT), also:

$$\text{DFT:} \quad \mathbf{c} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}_N} \mathbf{y}, \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j w^{-kj}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

$$\text{IDFT:} \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}_N \mathbf{c}, \quad y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w^{kj}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Man berechne DFT( $\mathbf{y}$ ) für die abgetastete Sägezahnfunktion

$$y_j = \frac{j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

# Fourier-Reihen

## Diskrete Faltung, Rechenregeln

Wir definieren zu einem Vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  dessen **periodische Fortsetzung**

$$\{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad y_j = y_{j \bmod N} \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Weiter definieren wir die **Faltung**  $\mathbf{y} * \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  (diskrete Faltung, Faltungsprodukt, periodische Faltung) zweier Vektoren  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  durch

$$(\mathbf{y} * \mathbf{z})_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j z_{k-j}. \quad (11.16)$$

### Satz 11.34

Für die DFT zweier Vektoren  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  mit Fourier-Koeffizienten  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^N$  gelten folgende Rechenregeln:

$$\text{DFT}(\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}) = \alpha \mathbf{c} + \beta \mathbf{d} \quad (\text{Linearität}) \quad (11.17a)$$

$$\text{DFT}((y_{j+n})_j) = (w^{kn} c_k)_k \quad (\text{Translation Zeitbereich}) \quad (11.17b)$$

$$\text{DFT}((w^{jn} y_j)_j) = (c_{k-n})_k \quad (\text{Translation Frequenzbereich}) \quad (11.17c)$$

$$\text{DFT}(\mathbf{y} * \mathbf{z}) = (c_k d_k)_k \quad (\text{Faltung}) \quad (11.17d)$$

Man berechne die DFT der Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  mit

$$\mathbf{x} = [1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0]^\top,$$

$$\mathbf{y} = [0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1]^\top, \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = [1, 1, \dots, 1].$$

### Satz 11.35

Zwischen den Komponenten eines Vektors  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  und seiner DFT  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^N$  besteht die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2. \quad (11.18)$$

- Die „naive“ Berechnung einer DFT (Matrix-Vektor Produkt mit  $\overline{F_N}/N$ ) erfordert offenbar  $O(N^2)$  komplexe Multiplikationen.
- Bei Anwendung der **schnellen Fourier-Transformation** (FFT) reduziert sich dieser Aufwand auf  $O(N \log N)^2$ .
- Diese Verbesserung kann nicht überbewertet werden:

*It [the FFT] has changed the face of science and engineering so much that it is not an exaggeration to say that life as we know it would be very different without the FFT.”* Charles F. Van Loan, Computational Frameworks of the FFT”

- Wir setzen (aus schreibtechnischen Gründen) im Folgenden

$$\zeta_N := \overline{w_N} = e^{-2\pi i/N} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right),$$

so dass  $F_N = [\zeta_N^{kj}]_{0 \leq k, j \leq N-1}$ . Außerdem sei  $N$  gerade.

---

<sup>2</sup>James William Cooley (\*1926) and John Wilder Tukey (1915–2000): An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comp.* **19**, 297–301 (1965).

**Die Idee der FFT** (für  $N = 8$ ): Mit  $\zeta := \zeta_8$  ist

$$F_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & \zeta^5 & \zeta^6 & \zeta^7 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 & \zeta^8 & \zeta^{10} & \zeta^{12} & \zeta^{14} \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \zeta^9 & \zeta^{12} & \zeta^{15} & \zeta^{18} & \zeta^{21} \\ 1 & \zeta^4 & \zeta^8 & \zeta^{12} & \zeta^{16} & \zeta^{20} & \zeta^{24} & \zeta^{28} \\ 1 & \zeta^5 & \zeta^{10} & \zeta^{15} & \zeta^{20} & \zeta^{25} & \zeta^{30} & \zeta^{35} \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^{12} & \zeta^{18} & \zeta^{24} & \zeta^{30} & \zeta^{36} & \zeta^{42} \\ 1 & \zeta^7 & \zeta^{14} & \zeta^{21} & \zeta^{28} & \zeta^{35} & \zeta^{42} & \zeta^{49} \end{bmatrix}.$$

Wegen  $\zeta^8 = 1$ , d.h.  $\zeta^j = \zeta^k$ , wenn  $j - k$  (ohne Rest) durch 8 teilbar ist, folgt

$$F_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & \zeta^5 & \zeta^6 & \zeta^7 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 & 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \zeta & \zeta^4 & \zeta^7 & \zeta^2 & \zeta^5 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^5 & \zeta^2 & \zeta^7 & \zeta^4 & \zeta & \zeta^6 & \zeta^3 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 & 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \\ 1 & \zeta^7 & \zeta^6 & \zeta^5 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta^1 \end{bmatrix}.$$



Jetzt nummerieren wir die Zeilen von  $F_8$  um: zuerst werden die mit geradem Index (0,2,4,6), danach die mit ungeradem Index (1,3,5,7) gezählt. Die zugehörige Permutationsmatrix wird mit  $P$  bezeichnet.

$$PF_8 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 & 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 & 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \\ \hline 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & \zeta^5 & \zeta^6 & \zeta^7 \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \zeta & \zeta^4 & \zeta^7 & \zeta^2 & \zeta^5 \\ 1 & \zeta^5 & \zeta^2 & \zeta^7 & \zeta^4 & \zeta & \zeta^6 & \zeta^3 \\ 1 & \zeta^7 & \zeta^6 & \zeta^5 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta^1 \end{array} \right] =: \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

Wir untersuchen die einzelnen Blöcke: Wegen  $\zeta = \zeta_8$  ist  $\zeta^2 = \zeta_4$ , d.h.

$$B_{1,1} = B_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_4 & \zeta_4^2 & \zeta_4^3 \\ 1 & \zeta_4^2 & \zeta_4^4 & \zeta_4^6 \\ 1 & \zeta_4^3 & \zeta_4^6 & \zeta_4^9 \end{bmatrix} = F_4.$$

Aus den Spalten 0,1,2 bzw. 3 von  $B_{2,1}$  „klammern“ wir  $\zeta^0$ ,  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$  bzw.  $\zeta^3$  „aus“:

$$B_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^3 \end{bmatrix} = F_4 D_4.$$

Analog:

$$B_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^7 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_4(\zeta^4 \mathbf{D}_4) = -\mathbf{F}_4 \mathbf{D}_4.$$

Insgesamt erhalten wir

$$PF_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{F}_4 \\ \mathbf{F}_4 \mathbf{D}_4 & -\mathbf{F}_4 \mathbf{D}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{D}_4 & -\mathbf{D}_4 \end{bmatrix}.$$

## Satz 11.36

Seien  $N$  gerade,  $\sigma$  die folgende (gerade/ungerade) Permutation

$$\sigma = [0, 2, \dots, N-2, 1, 3, \dots, N-1]$$

und  $P = P_\sigma$  die zugehörige Permutationsmatrix.

Dann besitzt die zeilenpermutierte Fourier-Matrix  $F_N$  die Zerlegung

$$PF_N = \begin{bmatrix} F_{N/2} & F_{N/2} \\ F_{N/2} D_{N/2} & -F_{N/2} D_{N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{N/2} & O \\ O & F_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N/2} & I_{N/2} \\ D_{N/2} & -D_{N/2} \end{bmatrix}.$$

Dabei bezeichnet  $D_{N/2}$  die Diagonalmatrix

$$D_{N/2} = \text{diag} \left( \zeta_N^0, \zeta_N^1, \dots, \zeta_N^{N/2-1} \right) \in \mathbb{C}^{(N/2) \times (N/2)}$$

mit  $\zeta_N = \overline{w_N} = e^{-2\pi i/N}$ .

Berechne jetzt  $\mathbf{y} = \mathbf{F}_N \mathbf{x}$  für ein  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  ( $N$  gerade). Gemäß der Zerlegung von  $\mathbf{F}_N$  aus Satz 11.36 unterteilen wir dies in zwei Schritte:

**(1) Reduktionsschritt:** Berechne

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \\ \mathbf{D}_{N/2} & -\mathbf{D}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Im Fall  $N = 8$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 + x_4, & z_1 &= x_1 + x_5, & z_2 &= x_2 + x_6, & z_3 &= x_3 + x_7 \\ z_4 &= (x_0 - x_4), & z_5 &= (x_1 - x_5)\zeta_N, & z_6 &= (x_2 - x_6)\zeta_N^2, & z_7 &= (x_3 - x_7)\zeta_N^3 \end{aligned}$$

( $N/2$  komplexe Multiplikationen und  $N$  komplexe Additionen).

**(2) Teilprobleme:** Berechne

$$\mathbf{F}_{N/2} \mathbf{z}(0 : N/2 - 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{N/2} \mathbf{z}(N/2 : N - 1)$$

(zwei Fourier-Transformationen der Dimension  $N/2$ ).

- Ist  $N = 2^p$  eine Zweierpotenz, so ist  $N/2$  ebenfalls gerade und die beiden DFT der Dimension  $N/2$  können auf vier DFT der Dimension  $N/4$  reduziert werden.
- Der Aufwand zur Reduktion beträgt  $2 \cdot N/4 = N/2$  komplexe Multiplikationen (und  $2 \cdot N/2 = N$  komplexe Additionen). Dieser Prozess wird solange fortgesetzt bis man eine Multiplikation mit  $F_N$  auf  $N$  Multiplikationen mit  $F_1 = [1]$  reduziert hat (eine Multiplikation mit  $F_1$  erfordert offenbar keinen Aufwand).
- Dieses Reduktionsverfahren heißt schnelle Fourier-Transformation (FFT = Fast Fourier Transform).

### Satz 11.37

Zur Durchführung einer schnellen Fourier-Transformation der Ordnung  $N = 2^p$  sind

$$\frac{N}{2} p = \frac{N}{2} \log_2(N) \quad \text{komplexe Multiplikationen}$$

und  $N \log_2 N$  komplexe Additionen erforderlich.

Die naive Berechnung einer Fourier-Transformation der Länge  $N = 2^p$  durch  $F_N \mathbf{x}$  erfordert also  $2^{p+1}/p$ -mal mehr Multiplikationen als ihre Berechnung durch FFT. Wenn z.B. für  $p = 20$  die FFT-Version eine Sekunde benötigt, so benötigt  $F_N \mathbf{x}$  etwa 29 Stunden.

**Verbleibendes Problem:** Bestimmt man  $\mathbf{y} = F_N \mathbf{x}$  durch FFT, so erhält man zunächst eine permutierte Version  $\tilde{\mathbf{y}} = Q \mathbf{y}$  von  $\mathbf{y}$  mit einer Permutationsmatrix  $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

Es gilt: Besitzt für  $N = 2^p$  der Index  $i \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$  die Binärdarstellung

$$i = b_{p-1}2^{p-1} + \dots + b_22^2 + b_12 + b_0 =: [b_{p-1} \dots b_2 b_1 b_0]_2,$$

und ist

$$r(i) := [b_0 b_1 b_2 \dots b_{p-1}]_2 = b_02^{p-1} + b_12^{p-2} + b_22^{p-3} + \dots + b_{p-1}$$

(**bit reversal**), dann gelten

$$y_i = \tilde{y}_{r(i)} \quad \text{und} \quad \tilde{y}_i = y_{r(i)}.$$

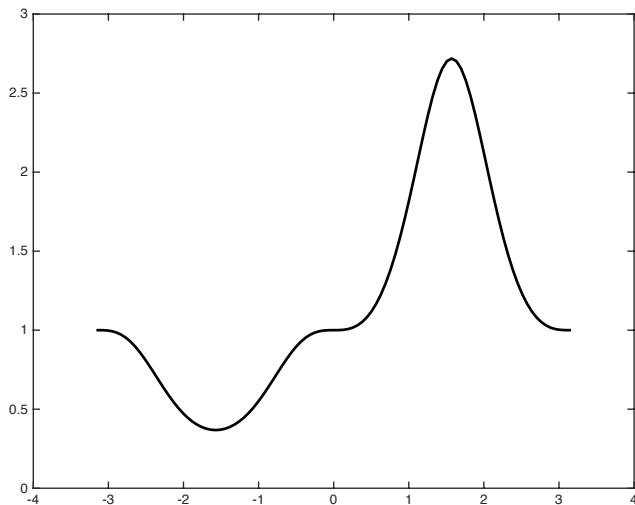
- Bis zur Einführung der Compact Disk (CD) in den frühen 1980er Jahren erfolgte die Speicherung von Audio-Signalen auf analogen Medien wie Vinyl-Schallplatten oder Magnetbänder.
- Mit dem CD Format lagen Audiodaten erstmalig für den Verbraucher in digitaler Form vor und konnten mit Computern verarbeitet werden.
- **Verlustfreie Kompressionsverfahren** (Huffman coding) erreichen eine Datenkompression auf ca. die Hälfte des CD-Formats.
- Erst die Entwicklung **verlustbehafteter Kompressionstechniken** gestattete eine deutlich stärkere Kompression auf etwa 10% des CD-Formats.
- Einen großen Umbruch in der Musikindustrie bewirkte die Verfügbarkeit des **MP3-Formats** (eigentlich MPEG-1 Audio Layer III), welches den bequemen Austausch komprimierter Musiktitel über allgemein verfügbare Internetverbindungen ermöglichte.
- Entwicklung: ab 1982 unter Leitung von Hans-Georg Musmann von einer Gruppe um Karlheinz Brandenburg am Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen in Erlangen sowie an der FAU Erlangen-Nürnberg in Zusammenarbeit mit AT&T Bell Labs und Thomson.



- Um ein analoges Audiosignal zu mit dem **Pulse Code Modulation (PCM)** zu digitalisieren wird es in äquidistanten Zeitabständen abgetastet und die Funktionswerte auf eine endliche Skala abgebildet (**Quantisierung**).
- Für unterschiedliche Arten von Audiosignalen werden verschiedene Abtastraten und Skalen verwendet.
- Telefonie: 8000 Hz, 13-Bit Integer, diese werden in ein 8-Bit Gleitpunktformat mit 4-Bit-Mantisse übertragen; ergibt Bitrate von 64000 Bit/s, d.h. 64 kb/s.
- CD-Format: 44100 Hz, 16-Bit Integer, 2 Kanäle (Stereo), ergibt 1411200 Bit/s, oder 1411,2 kb/s. (10 MB für 1 Minute Stereo-Audio).
- Die Bitrate allein ist nur ein grobes Maß für die Qualität eines Audioformats, da unterschiedliche Kodierungsverfahren zum Einsatz kommen.
- Verlustfreie Formate: AIFF, WAV, Apple Lossless, FLAC
- Verlustbehaftete Formate: MP3, AAC, OGG Vorbis, WMA.

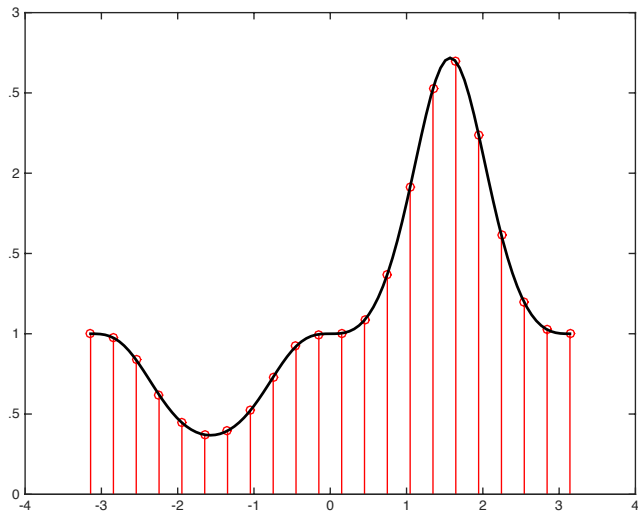
# Fourier-Reihen

Audio-Kompression: Digitalisierung mittels PCM



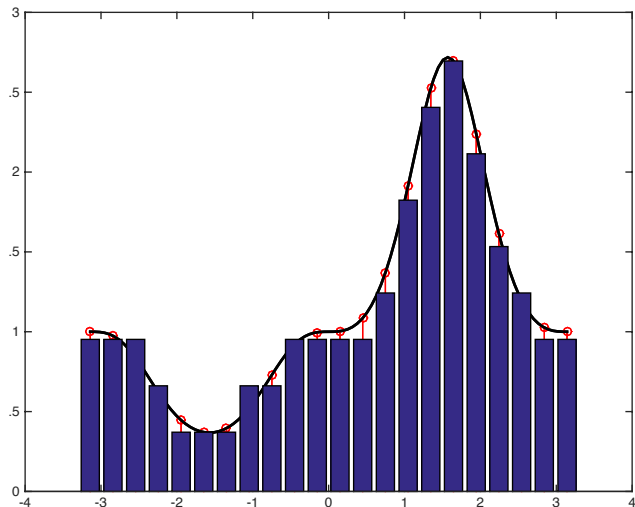
# Fourier-Reihen

Audio-Kompression: Digitalisierung mittels PCM



# Fourier-Reihen

Audio-Kompression: Digitalisierung mittels PCM



Schematische Darstellung von MP3 Kodierung:

- 1 Digitalisierung, PCM Datenstrom. MP3 unterstützt Bitraten von 32 bis 320 kbit/s, Abtastraten von 32, 44.1 und 48 kHz.
- 2 Aufteilung des Eingangssignals in verschiedene spektrale Frequenzbereiche mittels Gruppen von Bandpassfiltern, realisiert durch PQF (polyphase quadrature filter) oder QMR (quadrature mirror filter).
- 3 Zerlegung in Blöcke der Länge 576.
- 4 Diskrete Kosinus-Transformation (DCT), genauer: modifizierte DCT (MDCT), zur Zerlegung in Frequenzanteile.
- 5 Ausdünnung (Quantisierung) der Spektralkomponenten durch Berücksichtigung psychoakustischer Effekte.
- 6 Verlustfreie Komprimierung der verbleibenden Frequenzanteile (Huffman-Kodierung).

Ausgangspunkt: DFT-Beziehungen zwischen  $\mathbf{c} = \text{DFT}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^N$ :

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j w^{-jk}, \quad y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w^{jk}, \quad w = e^{2\pi i/N}.$$

- Fourier-Darstellung von  $\mathbf{y}$  impliziert **periodische** Fortsetzung auf  $\mathbb{Z}$ :  
 $y_{j+\ell N} = y_j \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}$ . Dies führt bei blockweiser Transformation eines Audiosamples zu Artefakten. Außerdem: Daten bei Audiosignalen **reell**.
- Aus  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  folgt die Symmetriebeziehung  $c_{N-k} = \overline{c_k}$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ .  
(Vgl. die analoge Beziehung bei Fourier-Reihen).
- Aus der Annahme **gerader Symmetrie**  $y_{N-j} = y_j$  für den Vektor  $\mathbf{y}$   
(Symmetrie zu  $N/2$ ) folgt  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ .
- Für reelle Vektoren  $\mathbf{y}$  mit gerader Symmetrie liegt also dieselbe Symmetrie  
für den (reellen) Vektor  $\mathbf{c}$  vor.
- In diesem Fall erhalten wir somit eine Transformation zwischen reellen  
Vektoren der Länge  $(N+2)/2$  ( $N$  gerade) bzw.  $(N+1)/2$  ( $N$  ungerade).

Wir betrachten daher nun die DFT eines reellen Vektors der Länge  $2N$  mit gerader Symmetrie, mit Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2N} \left[ y_0 + \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot 2 \operatorname{Re} w_{2N}^{jk} + y_N w_{2N}^{Nk} \right], \quad k = 0, \dots, 2N - 1.$$

Unter Beachtung von

$$\operatorname{Re} w_{2N}^{jk} = \cos \frac{2\pi jk}{2N} \quad \text{sowie} \quad w_{2N}^{Nk} = (-1)^k$$

erhalten wir

$$c_k = \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{2} y_0 + \sum_{j=1}^{N-1} y_j \cos \frac{jk\pi}{N} + \frac{(-1)^k}{2} y_N \right], \quad k = 0, \dots, N. \quad (11.19)$$

- Die Abbildung (11.19) heißt **diskrete Kosinustransformation** (Discrete Cosine Transform, DCT), genauer gesagt DCT-I.
- Wie man leicht nachprüft ist die inverse Transformation gegeben durch

$$y_j = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cos \frac{jk\pi}{N} + (-1)^k c_N \quad j = 0, \dots, N.$$

- Es gibt weitere Möglichkeiten, einen Vektor aus  $N + 1$  reellen Zahlen symmetrisch fortzusetzen. Diese führen auf insgesamt 8 Varianten der DCT, mit DCT-I bis DCT-VIII bezeichnet.
- Eine besondere Rolle bei der MP3-Kompression spielt die **DCT-IV**:

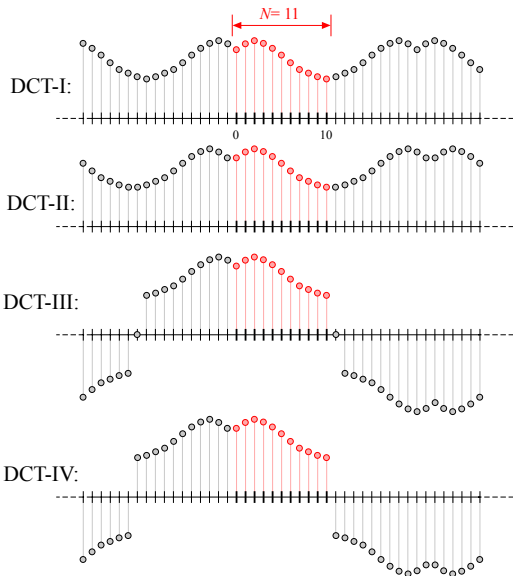
$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( j + \frac{1}{2} \right) \left( k + \frac{1}{2} \right) \right], \quad k = 0, \dots, N - 1.$$



# Fourier-Reihen

## Audio-Kompression: DCT-Typen

Die ersten vier DCT-Typen mit ihren Symmetrien am Beispiel  $N = 11$ .



Quelle: English Wikipedia user Stevenj

- Um Artefakte bei Blockübergängen zu unterdrücken wird bei der MP3-Kodierung eine **überlappende Transformation** verwendet, welche auf der DCT-IV basiert, die sogenannte **modifizierte DCT (MDCT)**.
- Hierbei wird eine Transformation  $\mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  realisiert:

$$c_k = \sum_{j=0}^{2N-1} y_j \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( j + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \right) \left( k + \frac{1}{2} \right) \right], \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- Neben der Kompensierung von Unstetigkeiten durch Blockbildung eliminiert kompensiert die Überlappung auch **Aliasing**-Effekte. (TDAC, time-domain aliasing compensation)
- Wie bei der DFT kann auch die MDCT in  $O(N \log N)$  Operationen realisiert werden.
- Anstelle Fourier-basierter Kompression können auch andere Basen eingesetzt werden: an erster Stelle sind hier **Wavelet**-Techniken zu nennen.

Als letzter Schritt bei der MP3-Kodierung erfolgt die Kompression der verbleibenden Anteile durch eine verlustfreie Kompressionstechnik namens **Huffman-Kodierung**.

### Terminologie und Vorgehen:

- Eine endliche Folge von Symbolen  $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  nennen wir einen **Text**.
- Die Symbole  $x_j$  mögen einer endlichen Menge  $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  entstammen, welche als **Alphabet** bezeichnet wird.
- $f(\alpha_i)$  sei die Häufigkeit des Auftretens des Symbols  $\alpha_i$  im Text  $\boldsymbol{x}$ .
- Zur Kompression wird jedem Symbol ein Binärcode  $c(\alpha_i)$  zugeordnet und der Text  $\boldsymbol{x}$  entsprechend als Bitfolge gespeichert, wobei jedes Symbol durch seinen Binärcode ersetzt wird.
- Die Menge aller Binärcodes heißt **Diktionär** oder **Code Book**.

- Eine optimale Kompression wird erreicht, wenn häufig auftretende Symbole kurze Binärcodes erhalten.
- Verbleibendes Problem: bei unterschiedlich langen Binärcodes muss die Grenze zwischen Symbolen erkennbar sein.
- Bei der Huffman-Kodierung erhalten die häufigsten Symbole die kürzesten Binärcodes. Letztere besitzen die sog. **Präfix-Eigenschaft**: diese besagt, dass der Binärcode eines Symbols niemals als Präfix eines anderen Symbols auftritt.
- Ein Overhead entsteht dadurch, dass mit der Kodierung auch der Diktionär mitgespeichert werden muss, sodass eine Komprimierung erst ab einer gewissen Mindestlänge erzielt wird.
- Optimale Diktionäre für einen Text können mit Hilfe von Binärbäumen konstruiert werden.

Ein **Huffman-Baum** ist ein einem Text  $x$  mit Alphabet  $\mathcal{A}$  und Häufigkeiten  $f(\alpha_i)$  zugeordneter Binärbaum mit folgenden Eigenschaften:

- 1 Jedes Blatt entspricht genau einem Symbol in  $\mathcal{A}$ , und jedem Symbol ist genau ein Blatt zugeordnet.
- 2 Jeder Knoten besitzt ein ganzzahliges Gewicht:
  - (a) Das Gewicht eines Blattes ist die Häufigkeit des zugehörigen Symbols.
  - (b) Das Gewicht eines Knotens ist die Summe der Gewichte aller Knoten des Unterbaums dieses Knotens.
- 3 Alle Knoten, die keine Blätter sind, besitzen genau zwei Söhne.

Der Huffman-Code eines Symbols bestimmt man nun wie folgt: Man durchläuft den Huffman-Baum von der Wurzel bis zum Blatt dieses Symbols und fügt bei jedem durchlaufenen Knoten ein Bit der Kodierung hinzu: eine Null, wenn die Kante nach links weist, eine Eins wenn diese nach rechts weist.

---

### Algorithm 1: Huffman-Algorithmus.

---

**Gegeben:** Text  $x$ , Alphabet  $\mathcal{A}$ , Häufigkeiten  $f(\alpha_i), \alpha_i \in \mathcal{A}$ .

- 1 Erzeuge für jedes Symbol einen einknotigen Huffman-Baum mit dessen Häufigkeit als Gewicht.
  - 2 **solange mehr als ein Baum vorhanden tue**
  - 3     Wähle zwei Bäume  $B_0, B_1$  mit minimalen Gewichten.
  - 4     Ersetze diese durch einen neuen Baum mit  $B_0, B_1$  als linken bzw. rechten Teilbaum.
  - 5 Der letzte Baum ist ein Huffman-Baum zum Text  $x$ .
- 

### Satz 11.38 (Optimalität der Huffman-Kodierung)

Sei  $x$  ein Text sowie  $B$  ein Binärbaum mit den Symbolen aus  $x$  als Blätter. Bezeichnet  $\ell(B)$  die Anzahl Bits in der Kodierung von  $x$  durch den durch  $B$  dargestellten Code, so gilt für den den Huffman-Baum  $B^*$  zu  $x$

$$\ell(B^*) \leq \ell(B).$$

# Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- die Begriffe Funktionenfolge und -reihe gut verstanden haben,
- zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz unterscheiden können und einfache Funktionenfolgen darauf untersuchen können,
- über die Konvergenzeigenschaften einer Potenzreihe bescheidwissen und Konvergenzradien sicher bestimmen können,
- Funktionen in Potenzreihen (Taylorreihen) entwickeln und mit Potenzreihen sicher rechnen können,
- den Begriff der trigonometrischen Reihe verstanden haben,
- die Fourierreihen zu stückweise glatten,  $2\pi$ -periodischen Funktionen berechnen können und über deren Konvergenz bescheidwissen,
- hinreichende Kriterien zu gleichmäßiger Konvergenz bzw. Konvergenz im quadratischen Mittel kennen,

# Ziele erreicht?

- hinreichende Kriterien zur gliedweisen Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit von Fourier-Reihen kennen,
- reelle und komplexe Darstellung von Fourier-Reihen ineinander Umrechnen können,
- Bedeutung und Prinzip der FFT kennen,
- die Rolle der DFT/DCT bei Datenkompression verstanden haben.