Mathematik III
(für Informatiker)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2014/15

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Inhalt

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen spielen bei vielen technischen und naturwissenschaftlichen Problemen eine zentrale Rolle.

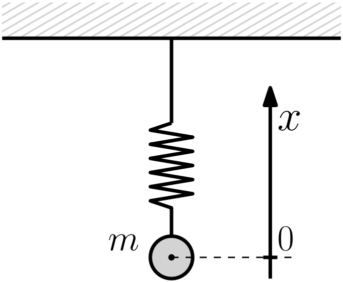
Grob gesprochen handelt es sich um Gleichungen, die Funktionen mit ihren Ableitungen verknüpfen. Entsprechend sind die Lösungen von Differentialgleichungen wieder Funktionen.

Man unterscheidet je nach Anzahl der Variablen in der gesuchten Funktion gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen.

Wir beschäftigen uns nur mit gewöhnlichen Differentialgleichungen,
bei denen die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängt.

Inhalt

Wir analysieren die Bewegung eines „Federschwingers“:



- Die Bewegung erfolge nur in x-Richtung.
- Der Nullpunkt der x-Achse sei durch die Ruhelage der Masse m festgelegt.
- Durch diese Wahl des Nullpunkts wird u. a. der Einfluss der Schwerkraft implizit berücksichtigt.

Die Bewegung der Masse im Zeitverlauf wird in erster Linie durch das Newtonsche Gesetz der Bewegung („Kraft = Masse · Beschleunigung") bestimmt:

$$F = m\,x''(t).$$

Als Kraft ist die (rücktreibende) Federkraft $F = -kx(t)$ anzusetzen (k die Federkonstante). Insgesamt ergibt sich die Differentialgleichung

$$x''(t) + \frac{k}{m}\,x(t) = 0. \tag{10.1}$$

Leicht erkennt man, dass jede Funktion der Form

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \tag{10.2}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (10.1) ist. Wir werden später sehen, dass sogar jede Lösung von (10.1) von dieser Bauart ist.

In der Realität werden wir aber immer ***genau einen*** Bewegungsablauf beobachten. Diese eindeutige Lösung der Differentialgleichung erhalten wir durch das Setzen zusätzlicher Bedingungen.

Beispielsweise könnte man Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ vorgeben, z. B.

$$x(0) = 42, \quad x'(0) = 0. \tag{10.3}$$

Die zu diesen Anfangsbedingungen gehörende eindeutige Lösung lautet

$$x(t) = 42 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right). \tag{10.4}$$

Es ist also ein kosinusförmiger Schwingungsverlauf zu erwarten.

Versuchen Sie, die Darstellung (10.4) durch Einsetzen der Anfangsbedingungen in (10.2) zu erhalten.

Vorgehen bei der Anwendung von Differentialgleichungen:

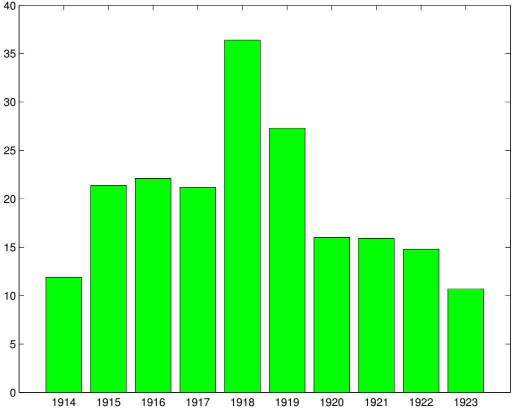
Das Beispiel des Federschwingers illustriert bereits, welche Schritte man bei der Anwendung von Differentialgleichungen i. A. zu gehen hat*:

- mathematische Modellierung des naturwissenschaftlichen Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung,
- Formulierung sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen,
- Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen (der Inhalt dieses Kapitels),
- Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung.

Wir werden das Vorgehen an einem weiteren Beispiel aus der Biologie verdeutlichen.

* übernommen aus Bärwolff, Höhere Mathematik, Kapitel 6.1

Umberto d'Ancona ermittelte 1925 den prozentualen Anteil der Haie am Gesamtfang (Speisefische und Haie) im Hafen von Triest wie folgt:



Benachteiligt eingeschränkter Fischfang (1. Weltkrieg) die Speisefische?

Die mathematische Modellierung erfolgt über ein Räuber-Beute-Modell (Vito Volterra, 1860–1940). Seien

$$x(t): \text{ Beutepopulation zur Zeit } t \text{ (Speisefische)},$$
$$y(t): \text{ Räuberpopulation zur Zeit } t \text{ (Haie)}.$$

Ohne Räuber würde sich die Beutepopulation nach dem Malthusianischen Gesetz (Thomas Robert Malthus, 1766–1834) vermehren:

$$x'(t) = a\,x(t) \qquad \text{(mit einer Konstanten } a > 0),$$

d.h. der Zuwachs wäre proportional zum Bestand bzw. das Wachstum wäre exponentiell

$$x(t) = x(0)\,e^{at} \qquad \text{für } t \geq 0.$$

(Das Modell ist natürlich nur eingeschränkt realistisch, etwa falls die Population nicht sehr dicht und ausreichend Nahrung vorhanden ist).

Die Dezimierung der Beutepopulation wie auch das Wachsen der Räuberpopulation ist proportional zur Anzahl der Räuber-Beute-Kontakte, und damit zum Produkt

$$x(t)y(t).$$

Als mathematisches Modell (zunächst ohne Fischfang) ergibt sich somit das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\,x(t) - b\,x(t)y(t), \qquad (a,b>0),\\ y'(t) &= -c\,y(t) + d\,x(t)y(t), \qquad (c,d>0). \end{aligned} \tag{10.5}$$

Eine eindeutige Lösung ergibt sich wieder, wenn man Anfangsbedingungen setzt. Infrage kommen z.B. Messwerte für x und y zur Zeit $t=0$.

Diskutieren Sie, warum das Minuszeichen vor c in (10.5) korrekt ist.

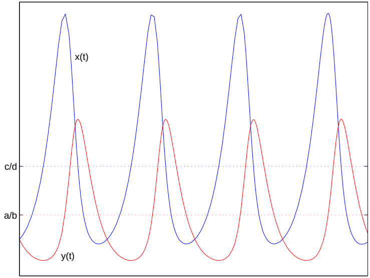
Es lässt sich zeigen, dass die Lösungen periodisch sind, d.h. es existiert eine Periodendauer $T > 0$ sodass

$$x(t) = x(t+T), \qquad y(t) = y(t+T).$$

Ferner gilt für die Mittelwerte der Populationsgrößen

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{c}{d}, \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{a}{b}.$$

Die Lösung des Systems (10.5) von Differentialgleichungen erfolgt auf numerischen Wege (dazu später). Typische Lösungen sehen wie folgt aus:



Moderaten Fischfang mit einer Rate $0 < e < a$ kann man im System (10.5) berücksichtigen durch die Modifikation

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\,x(t) - b\,x(t)y(t) - e\,x(t) = (a-e)\,x(t) - b\,x(t)y(t), \\ y'(t) &= -c\,y(t) + d\,x(t)y(t) - e\,y(t) = -(c+e)\,y(t) + d\,x(t)y(t). \end{aligned} \tag{10.6}$$

Strukturell ist dies das gleiche System wie (10.5), nur mit den Koeffizienten $a - e$ anstelle von a und $c + e$ anstelle von c.

Für die neuen Mittelwerte ergibt sich also

$$\bar{x}_F = \frac{c+e}{d} > \frac{c}{d} = \bar{x} \quad \text{und} \quad \bar{y}_F = \frac{a-e}{b} < \frac{a}{b} = \bar{y}.$$

Eine Rückübertragung auf das Ausgangsproblem könnte lauten:

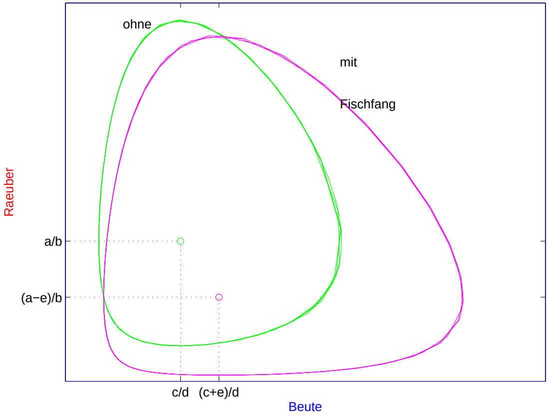
Volterras Prinzip

Angemessener Fischfang ($e < a$) steigert die mittlere Zahl der Speisefische und reduziert die durchschnittliche Zahl der Haie.

Ein Phasenplot der Lösung, d.h. die Darstellung der Kurve

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le T$$

verdeutlicht noch einmal Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Lösungen:



Inhalt

Definition 10.1

Ein Ausdruck der Form

$$F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{10.7}$$

mit einer Funktion $F : \mathbb{R}^{n+2} \supset M \to \mathbb{R}$ heißt gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung von (10.7) über dem Intervall I, wenn

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Liegt eine Differentialgleichung wie (10.7) in nach der höchsten Ableitung aufgelösten Form

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

vor, so spricht man von einer explizіten Differentialgleichung n-ter Ordnung, während man bei (10.7) von der impliziten Form spricht.

Die Menge aller Lösungen von (10.7) über dem Intervall I heißt allgemeine Lösung. Ist die Differentialgleichung von n-ter Ordnung, beinhaltet sie i.A. n freie Parameter, die sogenannten Integrationskonstanten.

Ist f eine stetige Funktion mit Stammfunktion F, so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = f(t)$ gegeben durch

$$y(t) = F(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Um für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung eine eindeutig bestimmte spezielle Lösung zu erhalten, sind weitere n Zusatzbedingungen nötig.

Bei Differentialgleichung erster Ordnung stellt man meist eine Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = y_0$. Man nennt

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

ein Anfangswertproblem (AWP) für die Dgl. $y' = f(t, y)$.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y' = t$ besitzt die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(2) = 1$ ergibt sich die spezielle Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1.$$

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellt man häufig auch Randbedingungen

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1.$$

Die Punkte t_0, t_1, an denen die Funktionswerte vorgeschrieben werden, sind dabei oft die Randpunkte des Intervalls I. Man spricht von einem Randwertproblem (RWP).

Bestimmen Sie die Lösungen des Randwertproblems

$$y'' = t; \quad y(0) = 1,\ y(1) = 1.$$

Ergibt sich auch eine eindeutige spezielle Lösung, wenn man statt der Randbedingungen die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ verwendet?

Wir werden auch Systeme von expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots &= \vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{10.8}$$

Kompakter lässt sich (10.8) schreiben als

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \tag{10.9}$$

mit einer stetigen Funktion $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset M \to \mathbb{R}^n$.

Warum wir uns auf Systeme erster Ordnung beschränken können, wird auf S. 26 erklärt.

Unter einer Lösung von (10.9) über dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ verstehen wir wieder eine stetig differenzierbare Funktion

$$\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^n,$$

die die Differentialgleichung (10.9) für alle $t \in I$ erfüllt.

Soll es eine ***eindeutige*** Lösung geben, muss man ***jeder*** der Komponentenfunktionen

$$t \mapsto y_i(t), \qquad i = 1, \dots, n,$$

einen Anfangswert zuordnen.

Wie im eindimensionalen Fall nennen wir die kombinierte Aufgabenstellung

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{10.10}$$

ein Anfangswertproblem (AWP) für die Differentialgleichung (10.9).

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung lässt sich immer auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit n Komponenten zurückführen. Ist

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

die gegebene Differentialgleichung, so führt man als neue Variablen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

ein, und erhält das zugehörige System gemäß

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n).
\end{aligned}$$

Beispiel: Die Differentialgleichung des Federschwingers

$$x''(t) = -\frac{k}{m} x(t)$$

lässt sich mit $x_1 = x$ und $x_2 = x'$ umschreiben zu

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_2(t), \\ x_2'(t) &= -\frac{k}{m} x_1(t), \end{aligned}$$

bzw.

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + y = \sin t$$

als System erster Ordnung. Kann man dieses System in die Form

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$$

bringen?

Bemerkung: Da man Differentialgleichungen n-ter Ordnung als Systeme erster Ordnung auffassen kann, konzentriert man sich bei der Entwicklung der Lösungstheorie häufig auf Systeme erster Ordnung.

Auch die meisten numerischen Verfahren sind auf diesen Fall zugeschnitten.

Satz 10.2 (Picard-Lindelöf)

Sei $f : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablengruppe (d.h. nach $y_1, \dots, y_n$) mit beschränkten partiellen Ableitungen nach diesen Variablen.

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{y}' = f(t, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$$

eine eindeutige Lösung auf $[t_0, t_0 + a]$.

Entsprechende Aussagen ergeben sich, wenn man statt $[t_0, t_0 + a]$ die Intervalle $[t_0 - a, t_0]$ bzw. $[t_0 - a, t_0 + a]$ verwendet.

Illustrierende Beispiele:

- Das Anfangswertproblem

  $$y' = \lambda y, \quad y(t_0) = y_0 \qquad (\lambda \text{ konstant})$$

  hat nach Satz 10.2 eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}$, denn $f(t,y) = \lambda y$ ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig, und $f_y(t,y) = \lambda$ (stetig und) beschränkt.

- Beim Anfangswertproblem

  $$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

  greift Satz 10.2 dagegen nicht, denn für $f(t,y) = \sqrt{y}$ ist $f_y(t,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ auf $(0,a]$ unbeschränkt und für $y = 0$ nicht definiert.

  Zu diesem AWP existieren tatsächlich unendlich viele Lösungen, nämlich

  $$y_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t \le \lambda, \\ \frac{(t-\lambda)^2}{4} & \text{für } t > \lambda, \end{cases} \qquad (\lambda \ge 0).$$

Randbemerkungen:

- Anstelle des „Streifens“ $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ kann man f auch auf einem „Quader“
$$Q := \{(t, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ t \in [t_0, t_0 + a], \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| \le b\}$$
betrachten. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ergeben sich dann für ein Intervall $[t_0, t_0 + \bar{a}]$ mit
$$\bar{a} = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \qquad M := \max_{(t,\boldsymbol{y}) \in Q} \|f(t, \boldsymbol{y})\|.$$
- Statt beschränkter partieller Ableitungen nach $\boldsymbol{y}$ genügt bereits das Erfülltsein einer Lipschitz-Bedingung bezüglich $\boldsymbol{y}$, das bedeutet
$$\|f(t, \boldsymbol{y}_2) - f(t, \boldsymbol{y}_1)\| \le L\|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1\|.$$
mit einer gewissen Konstante $L > 0$.
- Aufgrund der Betrachtungen von S. 26 kann man mit Satz 10.2 auch Differentialgleichungen n-ter Ordnung behandeln.

Inhalt

In diesem Abschnitt untersuchen wir Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(t, y), \quad t \in I, \tag{10.11}$$

bzw. die zugehörigen Anfangswertprobleme

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \tag{10.12}$$

stets unter der Annahme, dass die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind.

Ziel ist die Ermittlung der eindeutigen Lösung von (10.12) bzw. der allgemeinen Lösung von (10.11).

Die Veranschaulichung der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

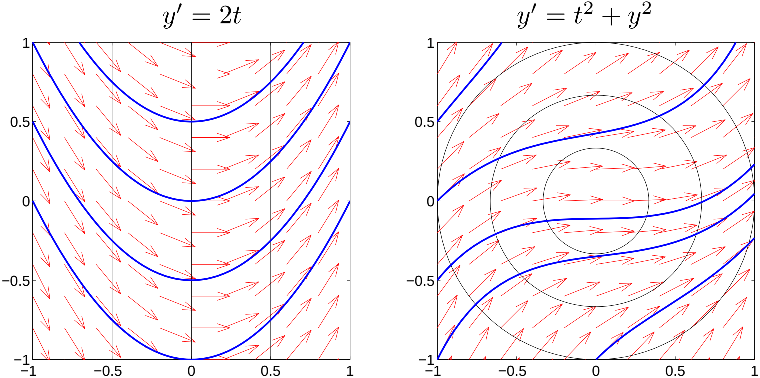
erfolgt oft über das zugehörige Richtungsfeld.

An jeden Punkt (t_0, y_0) der t-y-Ebene wird dabei ein Pfeil mit Anstieg $f(t_0, y_0)$ angeheftet.

Jede Lösung der Differentialgleichung muss in jedem Punkt $(t^*, y(t^*))$ ihres Funktionsgraphen dem Richtungsfeld „folgen“, d.h. als Tangente in t^* gerade den zugehörigen Pfeil des Richtungsfelds besitzen – denn es gilt

$$y'(t^*) = f(t^*, y(t^*)).$$

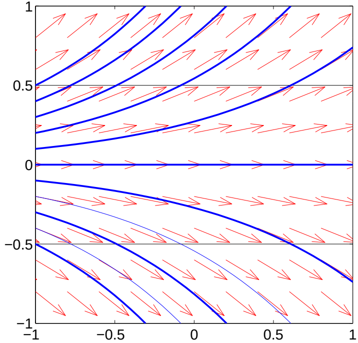
Beispiele



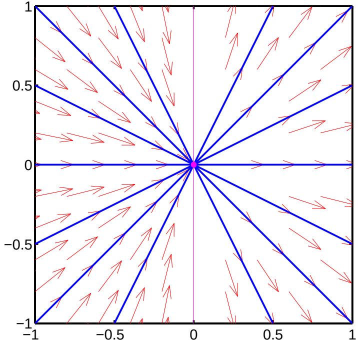
Richtungsfelder (rot) und einige spezielle Lösungen (blau).

Die schwarzen Kurven der Form $f(t, y) = c$ heißen Isoklinen. Alle an einer Isoklinen beginnenden Pfeile zeigen in die gleiche Richtung.

$$y' = y$$



$$y' = \frac{y}{t} \ (t \neq 0)$$



Das Euler-Verfahren (auch Polygonzugverfahren) ist der Prototyp eines numerischen Verfahrens zur Lösung von AWP der Form

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \quad \text{für } t \in I, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Wir geben uns dabei damit zufrieden, Näherungenen $y_n \approx y(t_n)$ an die Lösung zu diskreten Zeitpunkten $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ zu bestimmen.

Die Grundidee ist recht einfach:

1. Approximiere die Lösung im Intervall $[t_0, t_1]$ durch eine lineare Funktion, welche durch die vorgeschriebenen Anfangswerte (t_0, y_0) geht und die Steigung $f(t_0, y_0)$ besitzt.
2. Ist y_1 der Wert dieser linearen Funktion an der Stelle t_1 (im Allgemeinen ist $y_1 \neq y(t_1)$, aber dennoch eine gute Näherung), so ist die Näherungslösung im Intervall $[t_1, t_2]$ die lineare Funktion durch (t_1, y_1) mit Steigung $f(t_1, y_1)$.
3. So fährt man fort bis zum letzten Teilintervall $[t_{N-1}, t_N]$.

Wir fassen diese Idee zur Lösung des AWP

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

in folgendem Algorithmus:

Euler-Verfahren

Wähle eine Schrittweite $h > 0$ und definiere

$$t_n := t_0 + nh, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Für $n = 0, \ldots, N-1$ berechne

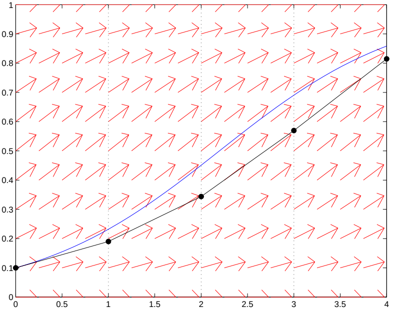
$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Selbstverständlich ist dieses Verfahren sehr grob und erfordert z. T. sehr kleine Schrittweiten h für hohe Genauigkeit. Allerdings ist es einfach zu programmieren und liefert häufig zumindest eine grobe Näherung.

Beispiel: Wir lösen ein AWP zur logistischen Gleichung

$$y' = y(1-y), \quad y(0) = 0.1,$$

mit dem Euler-Verfahren mit (sehr grober) Schrittweite $h = 1$.



Offenbar ist die gewonnene Näherung (schwarz) an die exakte Lösung (blau) noch sehr grob. Für eine brauchbare Approximation müsste man h deutlich kleiner wählen.

Inhalt

Trennung der Veränderlichen

Wir behandeln nun Methoden zur analytischen Bestimmung der Lösung von Differentialgleichungen/AWP.

Diese wurden zumeist für bestimmte Typen von Differentialgleichungen entwickelt. Einer der wichtigsten Typen ist gegeben durch:

Definition 10.3

Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'(t) = f(t)g(y)$$

heißt separabel oder Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen.

Häufig lassen sich separable Differentialgleichungen mittels Trennung der Veränderlichen (T. d. V.) lösen.

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind separabel? Geben Sie gegebenenfalls die Funktionen $f(t)$ und $g(y)$ an.

- $y' = y + 1$,
- $y' = ty + y$,
- $y' = t^2 \sin y$,
- $y' = ty + y^2$,
- $y' = \frac{t}{y}$,
- $y' = \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ fest).

Trennung der Veränderlichen

Lösungsmethode

Satz 10.4

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t)g(y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{10.13}$$

wobei $f : I_1 \to \mathbb{R}$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$ stetig, $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ Intervalle sowie $t_0 \in I_1$ und $y_0 \in I_2$. Dann gelten:

(1) Ist $g(y) \neq 0$ $(y \in I_2)$, so gibt es eine eindeutige Lösung von (10.13) auf einem offenen Intervall $J \subset I_1$. Diese kann man aus

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\tilde{y})}\,\mathrm{d}\tilde{y} = \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} \tag{10.14}$$

durch Auflösen nach y berechnen.

(2) Ist $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $y(t) = y_0$ eine Lösung von (10.13) auf I_1.

Trennung der Veränderlichen

Lösungsmethode

Wir fassen das Vorgehen bei der Lösung des AWP

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'(t) = f(t)g(y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

in folgendem Schema zusammen:

Vorgehen bei der Trennung der Veränderlichen

- Trenne die Variablen gemäß

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Integriere auf beiden Seiten:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\tilde{y})}\,\mathrm{d}\tilde{y} = \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t}$$

  (unbestimmte Integration zur Ermittlung der allgemeinen Lösung – Vorsicht bei der Wahl der Integrationskonstanten, siehe später).

- Löse nach y auf.

Trennung der Veränderlichen

Beispiel

Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = ty, \qquad y(0) = 1$$

führt Trennung der Veränderlichen auf

$$\int_1^y \frac{1}{\tilde{y}} \, \mathrm{d}\tilde{y} = \int_0^t \tilde{t} \, \mathrm{d}\tilde{t}$$

Nach Integration ergibt sich

$$\ln y = \frac{1}{2} t^2$$

und nach Auflösung nach y schließlich

$$y(t) = e^{\frac{1}{2} t^2}.$$

Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = y_0.$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ fest.

Anmerkung: Mit diesem Problem lässt sich zum Beispiel das Wachstum einer Population (Malthusianisches Gesetz, vgl. S. 14) erfassen ($\lambda > 0$).

Eine weitere Anwendung ist die Gleichung für den radioaktiven Zerfall eines Stoffes ($\lambda < 0$).

Das Verfahren von S. 44 kann auch zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t)g(y)$$

benutzt werden. Dafür muss man im zweiten Schritt unbestimmt integrieren:

$$\int \frac{1}{g(y)} \, \mathrm{d}y = \int f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Dabei entsteht nach Zusammenfassung beider Integrationskonstanten eine Gleichung vom Typ

$$G(y) = F(t) + c, \tag{10.15}$$

die man wieder nach y aufzulösen versucht. F und G sind dabei Stammfunktionen von f bzw. $\frac{1}{g}$.

- Bei der Wahl der Integrationskonstanten c in (10.15) ist Vorsicht geboten. Zu jedem zulässigen c gibt es eine zugehörige Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$, welche beim Integrieren auf

$$F(t) - F(t_0) = G(y) - G(y_0) \quad \text{bzw.} \quad c = G(y_0) - F(t_0)$$

führt. Sind F und G beispielsweise beschränkt, kann c ***nicht*** jeden Wert in $\mathbb{R}$ annehmen!

- Bei der Bestimmung der allgemeinen Lösung sind die Fälle mit $g(y) = 0$ natürlich wieder separat zu betrachten.

Wir suchen sämtliche Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{y}, \qquad y \neq 0.$$

in einer Umgebung von $t_0 = 0$. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int y \, \mathrm{d}y = \int t \, \mathrm{d}t,$$

und somit

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} t^2 + c_1.$$

Da $t_0 = 0$ im Lösungsintervall liegen soll, kommen nur Konstanten $c_1 > 0$ infrage ($c_1 = 0$ entfällt, da $y(0) \neq 0$ sein muss).

Für die Angabe der Lösung stellt man nach y um und redefiniert die Konstante ($c := \frac{1}{2} c_1$):

$$y(t) = \pm\sqrt{t^2 + c}, \qquad c > 0.$$

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t).$$

Achten Sie in jedem Schritt genau darauf, welche Werte die auftretende Konstante annehmen kann.

Vergessen Sie auch nicht, den Fall $y = 0$ zu behandeln.

Inhalt

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(at + by + c) \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

kann durch die Substitution

$$z = at + by + c$$

in eine separable Differentialgleichung überführt werden. Es gilt nämlich

$$z'(t) = a + by'(t) = a + bf(at + by + c) = a + bf(z),$$

was eine separable Differentialgleichung in z und t darstellt.

Lösen Sie auf diese Weise die Differentialgleichung $y' = (t + y)^2$.

Trennung der Veränderlichen

Ähnlichkeits-Differentialgleichung

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \qquad (t \neq 0)$$

heißt Ähnlichkeits-Differentialgleichung und kann durch die Substitution

$$z = \frac{y}{t}$$

in eine separable Differentialgleichung überführt werden. Es gilt nämlich $y = tz$ d. h.

$$y' = tz' + z = f(z).$$

Nach z' umgestellt heißt das

$$z'(t) = \frac{f(z) - z}{t}.$$

Lösen Sie auf diese Weise die Differentialgleichung $y' = \frac{t+2y}{t}$.

Inhalt

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition 10.5

Für gegebene stetige Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, heißt

$$y' + f(t)y = g(t) \tag{10.16}$$

lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

f heißt Koeffizientenfunktion und g heißt Störterm, Quellterm oder Inhomogenität.

Die Differentialgleichung (10.16) heißt homogen, wenn $g(t) = 0$, andernfalls inhomogen.

Die Bezeichnung „linear" bezieht sich dabei auf die y-Variable, d.h. $f(t)$ und $g(t)$ können durchaus nichtlineare Funktionen sein.

Für die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = 0$$

beobachten wir folgendes:

- Die Funktion $y \equiv 0$ ist eine Lösung.
- Sind y_1 und y_2 Lösungen, so ist auch $y_1 + y_2$ eine Lösung („Superpositionsprinzip").
- Ist y eine Lösung, dann ist auch λy für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

Welche algebraische Struktur ergibt sich damit für die Menge aller Lösungen der homogenen Gleichung?

Satz 10.6

Die Lösungsmenge Y_h der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' + f(t)y = 0 \tag{10.17}$$

bildet einen Vektorraum. Ist y_s eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = g(t), \tag{10.18}$$

dann hat die Lösungsmenge Y dieser inhomogenen Gleichung die Form

$$Y = y_s + Y_h.$$

Die allgemeine Lösung von (10.18) ist also gegeben durch

$$y = y_h + y_s \tag{10.19}$$

mit einer speziellen Lösung y_s von (10.18) und der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Verifizieren Sie Formel (10.19). Zeigen Sie dazu:

- Ist y_1 Lösung von (10.17), so ist $y_1 + y_s$ Lösung von (10.18).
- Ist y Lösung von (10.18), so ist $y - y_s$ Lösung von (10.17).

Bestimmung der Lösungen: Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = 0 \quad \text{bzw.} \quad y' = -f(t)y$$

kann mittels Trennung der Veränderlichen erfolgen. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so ergibt sich als allgemeine Lösung

$$y_h(t) = ce^{-F(t)}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Führen Sie diese Berechnung im Detail aus.

Wir benötigen nun noch eine spezielle Lösung y_s der inhomogenen Gleichung. Diese kann man mittels Variation der Konstanten erhalten, d.h. mit einem Ansatz der Form

$$y_s(t) = c(t)e^{-F(t)}.$$

Für die Ableitung gilt zunächst

$$y_s'(t) = \left[c'(t) - c(t)F'(t)\right] e^{-F(t)} = \left[c'(t) - c(t)f(t)\right] e^{-F(t)}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (10.18) liefert somit

$$\begin{aligned} y_s'(t) + f(t)y_s(t) &= \left[c'(t) - c(t)f(t) + f(t)c(t)\right] e^{-F(t)} \\ &= c'(t)e^{-F(t)} \stackrel{!}{=} g(t). \end{aligned}$$

Somit

$$c'(t) = g(t)e^{F(t)},$$

$$\text{bzw.} \quad c(t) = \int g(t)e^{F(t)} \,\mathrm{d}t.$$

Satz 10.7

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = g(t). \tag{10.20}$$

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann ist die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y' + f(t)y = 0$ gegeben durch

$$y_h(t) = ce^{-F(t)}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{10.21}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (10.20) ist gegeben durch

$$y_s(t) = e^{-F(t)} \int g(t)e^{F(t)} \, \mathrm{d}t, \tag{10.22}$$

wobei die Integrationskonstante weggelassen werden kann. Die allgemeine Lösung von (10.20) ist somit

$$y(t) = e^{-F(t)} \left(c + \int g(t)e^{F(t)} \, \mathrm{d}t \right), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + 2ty = t, \qquad y(0) = 1.$$

Im Kontext von Satz 10.7 setzen wir $f(t) = 2t$ bzw. $F(t) = t^2$ sowie $g(t) = t$. Nach (10.21) ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = ce^{-t^2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich nach (10.22) gemäß

$$y_s(t) = e^{-t^2} \int te^{t^2} \, \mathrm{d}t = e^{-t^2} \cdot \frac{1}{2} e^{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Natürlich hätten Sie statt (10.21) und (10.22) zu benutzen auch die Schritte von S. 58 f. erneut ausführen können.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t) = ce^{-t^2} + \frac{1}{2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösung des AWP ergibt sich

$$y(0) = c + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1,$$

d.h. $c = \frac{1}{2}$ bzw.

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-t^2}).$$

Für die Stromstärke I in einem Stromkreis mit Selbstinduktion und Spannungsverlauf $U = U(t)$ gilt die Beziehung

$$U = RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad (L, R > 0 \text{ fest}).$$

Ermitteln Sie den Verlauf der Stromstärke $I(t)$, falls $I(0) = I_0$. Was ergibt sich im Gleichstromkreis ($U(t)$ =const.) für $t \to \infty$?

Inhalt

Lineare Dgln. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von (10.16), bei dem die Koeffizientenfunktion $f(t)$ konstant ist:

$$y' + \lambda y = g(t). \tag{10.23}$$

Als Lösung des zugehörigen homogenen Systems hatten wir auf S. 50 bereits

$$y_h = ce^{-\lambda t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

identifiziert. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann man wieder mittels Variation der Konstanten finden – dies funktioniert immer.

Hat der Störterm $g(t)$ in (10.23) jedoch eine spezielle Struktur, so ist man häufig mit einem passenden Ansatz schneller.

g	Ansatz für y_s
Polynom vom Grad n	$K_0 + K_1 t + \cdots K_n t^n$
$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$	$K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$ oder $K \sin(\omega t + \kappa)$
Ae^{at}	Ke^{at}, falls $a \neq -A$, Kte^{at}, falls $a = -A$.

Die Ansätze werden also strukturell an den Störterm $g(t)$ angepasst.
Die Konstanten $K, K_0, K_1, \ldots$ bestimmt man jeweils durch Einsetzen in die Differentialgleichung (10.23).

Man bestimme auf diese Weise die Lösung der Differentialgleichung
$y' + 5y = -26\sin t$.

Inhalt

Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten im Folgenden Systeme der Form

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t). \tag{10.24}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mit (10.23) haben wir schon einen Spezialfall kennengelernt.

Ein weiteres einfaches Beispiel ist durch

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -42 & 0 \\ 0 & -23 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} y_1' &= -42\, y_1 \\ y_2' &= -23\, y_2 \end{aligned}$$

gegeben. Dieses System ist ***entkoppelt*** und besitzt die Lösung

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-42t} \\ c_2 e^{-23t} \end{bmatrix} = c_1 e^{-42t} \boldsymbol{e}_1 + c_2 e^{-23t} \boldsymbol{e}_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ganz analog zu Satz 10.6 gilt:

Satz 10.8

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

- Die Lösungsmenge Y_h des homogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, bildet einen Vektorraum der Dimension n.
- Ist $\boldsymbol{y}_s$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems und $\boldsymbol{y}_h$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems, so ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_s + \boldsymbol{y}_h.$$

Da die Lösungsmenge des homogenen Systems

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \tag{10.25}$$

ein n-dimensionaler Vektorraum ist, lässt sich eine Basis (auch Fundamentalsystem), bestehend aus n Lösungen dieses Systems, finden.

Die Elemente

$$\boldsymbol{y}_i(t), \qquad i = 1, \dots, n$$

einer solchen Basis heißen Fundamentallösungen.

Jede Lösung von (10.25) lässt sich eindeutig in der Form

$$\boldsymbol{y}(t) = \alpha_1 \boldsymbol{y}_1(t) + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2(t) + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{y}_n(t)$$

mit reellen Koeffizienten α_i darstellen.

Geben Sie ein vermutliches Fundamentalsystem zum Beispiel von S. 67 an.

Wie erkennt man aber, ob ein Funktionensystem $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ aus Lösungen von (10.25) linear unabhängig ist? Dabei hilft die Wronski-Determinante[1]

$$W(t) := \det\left([\boldsymbol{y}_1(t) \; \boldsymbol{y}_2(t) \; \dots \; \boldsymbol{y}_n(t)]\right).$$

Satz 10.9

Seien $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ Lösungen von $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Dann gilt:

- $W(t) \neq 0$ oder $W(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- Die Lösungen $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem, genau dann wenn $W(t) \neq 0$ für ein (und damit für alle) $t \in \mathbb{R}$ ist.

Überprüfen Sie Ihre Vermutung zum Beispiel von S. 67.

[1] Josef Hoëné-Wronski (1776–1853), polnischer Mathematiker

Wir wollen nun ein Fundamentalsystem von $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ bestimmen.
Sehr einfach ist die Aufgabe für eine Diagonalmatrix

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Wie im Beispiel auf S. 67 ist das System dann entkoppelt:

$$y_i' = \lambda_i y_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Ein Fundamentalsystem ist somit

$$e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{e}_1,\ e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ e^{\lambda_n t}\boldsymbol{e}_n. \tag{10.26}$$

Wir werden versuchen, den allgemeinen Fall – sofern möglich – auf eine solche Diagonalform zurückzuführen.

Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ versuchen wir, motiviert durch (10.26), den Ansatz

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}.$$

Einsetzen in $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ liefert

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{v} = Ae^{\lambda t}\boldsymbol{v},$$

und somit

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

Also muss λ Eigenwert von A, und $\boldsymbol{v}$ ein zugehöriger Eigenvektor sein.

Existiert eine Basis aus Eigenvektoren von A, haben wir auf diese Weise ein Fundamentalsystem gefunden.

Satz 10.10

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zum Eigenvektor $\boldsymbol{v}$, dann ist durch

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{v} \tag{10.27}$$

eine Lösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ gegeben.

Lösungen der Form (10.27), die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind linear unabhängig.

Ist A diagonalisierbar, so existiert ein Fundamentalsystem aus Lösungen der Form (10.27).

Erinnerung: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten übereinstimmen.
Dies gilt inbesondere, wenn alle Eigenwerte verschieden sind.

Anmerkung: Komplexe Eigenwerte treten immer in konjugiert-komplexen Paaren auf. Daher kann man unter Verwendung von Sinus und Kosinus auch reelle Fundamentallösungen erzeugen (Diskussion in anderem Kontext später).

Man bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Der nicht-diagonalisierbare Fall gestaltet sich etwas schwieriger. Hier reichen die linear unabhängigen Eigenvektoren nicht aus, um eine Basis des ganzen Raumes zu bilden. Man vervollständigt daher die Lösungsbasis mit Hilfe von Hauptvektoren, einer Verallgemeinerung von Eigenvektoren.

Wir nennen einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ Hauptvektor k-ter Stufe zum Eigenwert λ, wenn

$$(A - \lambda I)^k \boldsymbol{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{aber} \qquad (A - \lambda I)^{k-1} \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$$

gilt.

Ein Eigenvektor ist offenbar ein Hauptvektor erster Stufe (beachte $(A - \lambda I)^0 = I$).

Zu einem Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k lassen sich stets k linear unabhängige Hauptvektoren finden, und Hauptvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Wir illustrieren die Berechnung von Hauptvektoren zum Eigenwert λ am Fall $k = 2$. Es gilt

$$(A - \lambda I)^2 \boldsymbol{v} = (A - \lambda I) \underbrace{(A - \lambda I)\boldsymbol{v}}_{=: \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}.$$

Daher erhält man $\boldsymbol{v}$ aus dem Eigenvektor $\boldsymbol{w}$ durch Lösen der Gleichung

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}.$$

Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

besitzt den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

Bestimmen Sie einen Hauptvektor, und überzeugen Sie sich, dass dieser den Eigenvektor zu einer Basis ergänzt.

Satz 10.11

Sie λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A (also ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k), und $\boldsymbol{v}$ eine Lösung von

$$(A - \lambda I)^k \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \tag{10.28}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \boldsymbol{v} \\ &= e^{\lambda t} \left(\boldsymbol{v} + t(A - \lambda I)\boldsymbol{v} + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda I)^{k-1} \boldsymbol{v} \right) \end{aligned}$$

eine Lösung von $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

Es gibt immer k linear unabhängige Lösungen von (10.28), und diese führen zu linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung.

Man ermittle ein Fundamentalsystem für

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

(vgl. Bsp. S. 76).

Anmerkungen:

- Von den Hauptvektorlösungen sollten Sie vor allem mitnehmen, dass im Fall $\nu_{\mathsf{alg}}(\lambda) = k$ und $\nu_{\mathsf{geom}}(\lambda) = 1$ Terme der Form

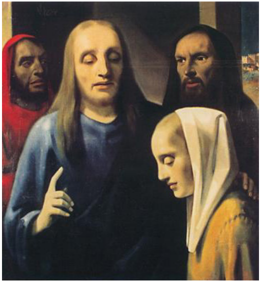
$$e^{\lambda t}\boldsymbol{v}, \quad te^{\lambda t}\boldsymbol{v}, \quad t^2 e^{\lambda t}\boldsymbol{v}, \ \dots\ , \quad t^{k-1}e^{\lambda t}\boldsymbol{v}$$

  auftreten können.
- Will man statt der homogenen Gleichung $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ das System $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(t)$ lösen, so erhält man eine spezielle Lösung wieder mittels Variation der (d. h. aller) Konstanten.

Inhalt

Exkurs: Die Fälschungen des Han van Meegeren

Im August 1945 entdeckten die Allierten in der Kunstsammlung Hermann Görings ein unbekanntes Gemälde Jan Vermeer van Delfts (1632-1675), nämlich „Christus und die Ehebrecherin“.



Kurz darauf wurde der Maler Han van Meegeren als mittelbarer Verkäufer ausgemacht und wegen Kollaboration mit dem Feind verhaftet.

- van Meegeren behauptet, das Bild wie auch vier weitere mutmaßliche Vermeers selbst gemalt zu haben
- beginnt im Gefängnis, ein weiteres Gemälde im Vermeer-Stil zu produzieren (u. a. Vermischung alter Farbe mit Phenolformaldehyd)
- Anklage wegen Kollaboration fallengelassen, dafür Anklage wegen Fälschung (auf einigen „Vermeers“ Phenolformaldehyd gefunden)
- Verurteilung am 12.10.1947 zu einem Jahr Gefängnis
- kurz darauf Tod van Meegerens in Haft

Ein Problemkind blieb „Christus und die Jünger in Emmaus“, welches trotz van Meegerens Aussage in einer Expertise eines bekannten Kunsthistorikers für echt befunden wurde.

Die Rembrandt-Gesellschaft hatte das Werk daraufhin für 174.000 US-$ erworben.

Der fortwährende Streit um die Authentizität von „Christus und die Jünger in Emmaus“ sollte schließlich 1967 von einer Forschergruppe an der Carnegie Mellon Universität (Pittsburgh, PA) entschieden werden.

In den Bildern wurde (wie seit über 2000 Jahren) Bleiweiß (Bleioxid) verarbeitet Dieses enthält kleine Beimengungen an radioaktivem Blei-210 und Radium-226.

Der Ansatz der Pittsburgher Analyse war, das Alter des Gemäldes anhand der gemessenen Zerfallsraten dieser Nuklide zu schätzen.

Betrachtet man den Zerfall eines einzelnes Nuklids, so ergibt sich die Anzahl der Kerne $N(t)$ zur Zeit t aus dem Zerfallsgesetz

$$N'(t) = -\lambda N(t), \quad t \geq t_0. \tag{10.29}$$

Die Zahl $\lambda > 0$ heißt Zerfallskonstante und gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Atom in einer vorgegebenen Zeit zerfällt.
Mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ ergibt sich für (10.29) die Lösung

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Mit $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ ergibt sich die Halbwertszeit. In dieser Zeit ist jeweils die Hälfte der Kerne zerfallen:

$$N(T_{\frac{1}{2}}) = N_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}} = N_0 e^{-\ln 2} = \frac{N_0}{2}.$$

Beim Fall von Bleierz haben wir es mit mehreren Nukliden zu tun, die eine Zerfallsreihe bilden. In etwas ökonomisierter Form lautet diese

$$\text{Uran-238} \xrightarrow{4.5\cdot 10^9\text{a}} \text{Radium-226} \xrightarrow{1.6\cdot 10^3\text{a}} \text{Blei-210} \xrightarrow{22.4\text{a}} \text{Blei-206}\ .$$

Wir bezeichnen mit $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ die Anzahl der Atome von Uran-238, Radium-226 bzw. Blei-210 zur Zeit t und berechnen aus den angegebenen Halbwertszeiten die zugehörigen Zerfallskonstanten,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1.54 \cdot 10^{-10},\\ \lambda_2 &= 4.33 \cdot 10^{-4},\\ \lambda_3 &= 3.09 \cdot 10^{-2} \quad \text{(jeweils in } a^{-1}\text{)}.\end{aligned}$$

Wegen $\lambda_1 \ll \lambda_2 < \lambda_2$ zerfällt das Ausgangsnuklid Uran-238 im Vergleich extrem langsam. Über unsere Beobachtungszeiträume wird $N_1(t)$ daher nahezu konstant sein.

Die Modellierung der Zerfallsreihe erfolgt nun über das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} N_1'(t) &= -\lambda_1 N_1(t), \\ N_2'(t) &= -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t), \\ N_3'(t) &= -\lambda_3 N_3(t) + \lambda_2 N_2(t), \end{aligned}$$

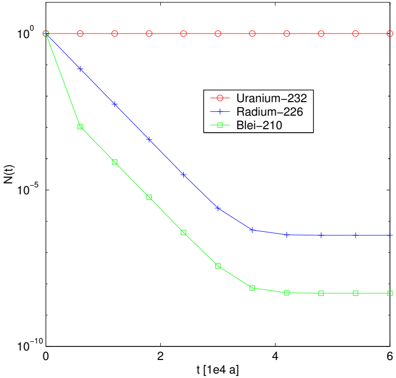
bzw. kürzer

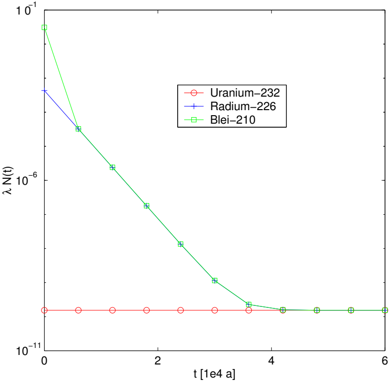
$$\boldsymbol{N}'(t) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{N}(t) \tag{10.30}$$

mit einer Anfangsbedingung $\boldsymbol{N}(0) = \boldsymbol{N}_0$.

Wir werden das System später lösen, betrachten aber zunächst eine numerische Lösung zur Anfangsbedingung $\boldsymbol{N}(0) = [1, 1, 1]^T$

Anzahl der Kerne für Uran-238, Radium-226 bzw. Blei-210 (links) und zugehörige Zerfallsraten (rechts).





Nach etwa 4000 Jahren stellt sich im Erz ein Gleichgewichtszustand ein, das radioaktive Gleichgewicht. Grund ist der extrem langsame Zerfall des Ausgangsnuklids.

Wie folgende Tabelle zeigt, hält sich das radioaktive Gleichgewicht über sehr lange Zeit ($t = 10^5 \dots 10^8$). Im Bleierz kann man daher ohne Probleme vom Gleichgewichtszustand ausgehen.

t [a]	$N_1(t)$	$N_2(t)$	$N_3(t)$
0	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$
10^1	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$7 \cdot 10^{-1}$
10^3	$1 \cdot 10^0$	$6 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-3}$
10^5	$1 \cdot 10^0$	$4 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-9}$
10^6	$1 \cdot 10^0$	$4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-9}$
10^7	$1 \cdot 10^0$	$4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-9}$
10^8	$1 \cdot 10^0$	$4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-9}$
10^9	$9 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-9}$
10^{11}	$2 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-15}$
10^{12}	$1 \cdot 10^{-67}$	$5 \cdot 10^{-74}$	$6 \cdot 10^{-76}$

Um die Beobachtung zu verstehen, lösen wir das System (10.30). Die Systemmatrix besitzt die Eigenwerte $-\lambda_1, -\lambda_2$ und $-\lambda_3$ (warum?)
mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Für die allgemeine Lösung ergibt sich somit

$$\boldsymbol{N}(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} \boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{-\lambda_2 t} \boldsymbol{v}_2 + c_3 e^{-\lambda_3 t} \boldsymbol{v}_3$$

Im fraglichen Zeitintervall $[10^5, 10^8]$ gilt $e^{-\lambda_1 t} \in [0.999984\ldots, 1]$ und $e^{-\lambda_2 t}, e^{-\lambda_3 t} \in [0, 1.5 \cdot 10^{-19}]$, so dass der zweite und dritte Summand zu vernachlässigen sind.

Mit $e^{-\lambda_1 t} \approx 1$ und $\lambda_1 \ll \lambda_2 < \lambda_3$ gilt also

$$\boldsymbol{N}(t) \approx c_1 \boldsymbol{v}_1 \approx c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \end{bmatrix},$$

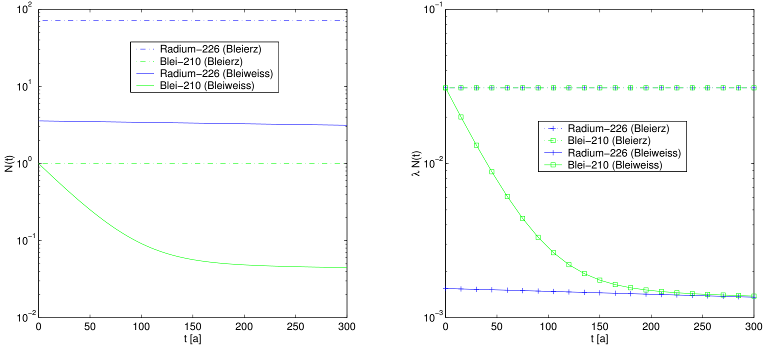
d. h. im Gleichgewicht gilt

$$\begin{aligned} \frac{N_1(t)}{N_2(t)} &\approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 2.81 \cdot 10^6, \\ \frac{N_1(t)}{N_3(t)} &\approx \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \approx 2.01 \cdot 10^8, \\ \frac{N_2(t)}{N_3(t)} &\approx \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \approx 7.14 \cdot 10^1. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Das sind in etwa die Verhältnisse, die wir auch in der Tabelle von S. 87 beobachten können.

Beim Schmelzen von Bleierz werden 90-95 % des Radiums und seiner Tochtersubstanzen mit der Schlacke entfernt, so dass das Blei-210 von seinem Nachschub abgeschnitten ist.

Im Bleiweiß zerfällt das Blei-210 also sehr schnell ($T_{1/2} \approx 22$ a), bis es nach ca. 200 Jahren mit den Resten des Radium-226 wieder im Gleichgewicht ist.



Wir modellieren nun das Zusammenspiel von Radium-226 und Blei-210 für etwa 300 Jahre nach der Herstellung von Bleiweiß (Herstellungs- zeitpunkt $t_0 = 0$).

Die Halbwertszeit von Radium-226 ist $T_{1/2} \approx 1600$ a, so dass wir für einen Zeitraum von 300 Jahren von einer konstanten Zerfallsrate $\rho_2 = \lambda_2 N_2(t)$ ausgehen können.

Es gilt also

$$\begin{aligned} N_3'(t) &= -\lambda_3 N_3(t) + \lambda_2 N_2(t) \\ &= -\lambda_3 N_3(t) + \rho_2. \end{aligned}$$

Legt man den Anfangswert $N_3(0)$ fest, ergibt sich mit den uns bekannten Standardmethoden (welcher genau?) die Lösung

$$N_3(t) = (N_3(0) - \frac{\rho_2}{\lambda_3})e^{-\lambda_3 t} + \frac{\rho_2}{\lambda_3}. \tag{10.32}$$

Natürlich kann man die Zerfallsraten nur in der Gegenwart messen. Stellt man (10.32) nach $\lambda_3 N_3(0)$ um, kann man in Kenntnis des Alters aber auf die Blei-210-Aktivität zum Herstellungszeitpunkt schließen:

$$\lambda_3 N_3(0) = \lambda_3 N_3(t) e^{\lambda_3 t} - \rho_2 (e^{\lambda_3 t} - 1).$$

Geht man nun von Echtheit aus, kann man ein Alter von $t \approx 300\,$a ansetzen. Wegen $e^{300\lambda_3} = e^{300 \ln 2 / T_{1/2}} \approx e^{300 \ln 2/22} = 2^{150/11}$ gilt dann

$$\lambda_3 N_3(0) = 2^{150/11} \lambda_3 N_3(t) - \rho_2 (2^{150/11} - 1).$$

Aus den so ermittelten Aktivitäten kann man wegen des radioaktiven Gleichgewichts (Formel (10.31)) auf den Urangehalt des verwendeten Erzes schließen. Realistisch sind selbst bei seltenen Erzen maximal $3\,\%$.

Daraus folgt für die Zerfallsrate zu Herstellungszeit, dass

$$\lambda_3 N_3(0) \overset{!}{\leq} 22000 \quad \text{(pro Minute und g Bleiweiß)}.$$

Damit können wir an die Auflösung des Rätsels gehen.

Exkurs: Die Fälschungen des Han van Meegeren

Erkennen Sie die Fälschungen?







	Zerfallsraten λN		
	Pb-210	Ra-226	Pb-210 ($t = 0$)
„Christus und die Jünger in Emmaus“	8.5	0.80	98050
„Fußwaschung Christi“	12.6	0.26	157100
„Die Notenleserin“	10.3	0.30	127300
„Die Mandolinenspielerin“	8.2	0.17	102300
„Die Spitzenklöpplerin“	1.5	1.40	1275
„Der Soldat und das lachende Mädchen“	5.2	6.00	10180

Zur Erinnerung: Der Wert $\lambda_3 N_3(0)$ darf bei Echtheit 22000 nicht überschreiten.

Exkurs: Die Fälschungen des Han van Meegeren

Auflösung

Die Bilder von S. 93 sind der Reihe nach:

- Han van Meegeren, „Christus und die Jünger in Emmaus“ (1936/37), Museum Boymans Van Beunningen, Rotterdam
- Han van Meegeren, „Fußwaschung Christi“ (1941), Rijksmuseum, Amsterdam
- Han van Meegeren, „Die Notenleserin“ (1935/36), Rijksmuseum, Amsterdam
- Han van Meegeren, „Die Mandolinenspielerin“ (1935/36), Rijksmuseum, Amsterdam
- Jan Vermeer, „Die Spitzenklöpplerin“ (ca. 1669/70), Louvre, Paris
- Jan Vermeer, „Der Soldat und das lachende Mädchen“ (ca. 1658), Frick Collection, New York
- Jan Vermeer, „Brieflesendes Mädchen am offenen Fenster“ (ca. 1659), Gemäldegalerie „Alte Meister“, Dresden

Quellen:

http://www.cacr.caltech.edu/ roy/vermeer,
http://www.mystudios.com/gallery/han/index.html

Inhalt

Eine lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eine Gleichung der Form

$$y'' + ay' + by = g(t) \qquad (a, b \in \mathbb{R}). \tag{10.33}$$

Man nennt (10.33) homogen, falls $g = 0$, und andernfalls inhomogen.

Setzt man $y_1 = y$ und $y_2 = y'$, so ist (10.33) äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}, \tag{10.34}$$

also zu einem System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Die Äquivalenz zu (10.34) wird zwar kaum zum Rechnen benutzt, liefert uns aber wichtige Informationen über die Struktur der Lösung von (10.33):

Satz 10.12

Die Lösungsmenge Y_h der homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{10.35}$$

ist ein zweidimensionaler Vektorraum.

Zwei Lösungen y_h, z_h von (10.35) bilden genau dann eine Basis von Y_h, wenn ihre Wronski-Determinante

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} y_h(t) & z_h(t) \\ y_h'(t) & z_h'(t) \end{bmatrix}$$

an mindestens einer Stelle $t \in \mathbb{R}$ von Null verschieden ist.

Die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung (10.33) ist $y_s + Y_h$, wobei y_s eine beliebige spezielle Lösung von (10.33) ist.

Zu Lösung der Differentialgleichung (10.33) geht man daher wie folgt vor:

(1) Bestimme zwei linear unabhängige Lösungen y_h, z_h der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Wie das geht, steht auf S. 100 f. und ist in Satz 10.13 zusammengefasst.

(2) Bestimme eine (beliebige) spezielle Lösung y_s der inhomogenen Gleichung (10.33). Siehe dazu S. 105 ff.

(3) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (10.33) ergibt sich dann gemäß

$$y(t) = c_1 y_h(t) + c_2 z_h(t) + y_s(t) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Bei der Lösung der homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

spielen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

eine Schlüsselrolle. Bei diesen handelt es sich gerade um die Eigenwerte der Matrix A aus (10.34). Wir können also die Ergebnisse aus Abschnitt 8 direkt übertragen.

Verifizieren Sie, dass $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom der Matrix A im Sinne der Eigenwerttheorie ist, d. h. dass $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ gilt.

Es können zwei Fälle auftreten:

- Die Gleichung $p(\lambda) = 0$ hat zwei verschiedene Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d. h. A hat zwei verschiedene Eigenwerte. Dann sind

$$y_h(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad z_h(t) = e^{\lambda_2 t}$$

  (möglicherweise komplexe) Basislösungen.

- Die Gleichung $p(\lambda) = 0$ hat genau eine Lösung $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
  Dann ist λ_1 Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 (leicht zu zeigen).

  Wir sind daher in der Hauptvektor-Situation von S. 77, und erhalten als Basislösungen

$$y_h(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad z_h(t) = t e^{\lambda_1 t}.$$

Unangenehm bleibt noch der Fall, dass λ_1 und λ_2 verschieden, aber komplex sind. In diesem Fall sind λ_1 und λ_2 zueinander konjugiert komplex, d. h. von der Form

$$\lambda_1 = \mu + i\omega, \quad \lambda_2 = \mu - i\omega \qquad (\mu, \omega \in \mathbb{R}).$$

Wegen

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} &= c_1 e^{\mu t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) + c_2 e^{\mu t}(\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= (c_1 + c_2) e^{\mu t} \cos(\omega t) + i(c_1 - c_2) e^{\mu t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, kann man statt $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ aber auch

$$y_h(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad z_h = e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

als ***reelle*** Lösungsbasis verwenden.

Satz 10.13

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Sei $D := \frac{a^2}{4} - b$. Dann sind zwei linear unabhängige Lösungen y_h und z_h gegeben durch

- $y_h = e^{\lambda_1 t}$ und $z_h = e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, falls $D > 0$,
- $y_h = e^{\lambda t}$ und $z_h = te^{\lambda t}$ mit $\lambda = -\frac{a}{2}$, falls $D = 0$,
- $y_h = e^{\mu t} \cos \omega t$ und $e^{\mu t} \sin \omega t$ mit $\mu = -\frac{a}{2}$ und $\omega = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$, falls $D < 0$.

Man bestimme die Lösungen der Differentialgleichungen

- $y'' + 4y' - 5y = 0$,
- $y'' - 2y' + y = 0$,
- $y'' + 4y = 0$,
- $y'' - 4y' + 5y = 0$,
- $y'' - y' = 0$,
- $y'' = 0$.

Für die Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

kann man grundsätzlich eine Variation der Konstanten für das äquivalente System (10.34) durchführen. Einfacher ist meist das Grundlösungsverfahren:

Satz 10.14

Sei g stetig auf dem Intervall I und sei $t_0 \in I$. Außerdem sei z_h die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + ay' + by = 0$, die die Anfangsbedingungen $y(t_0) = 0$ und $y'(t_0) = 1$ erfüllt. Dann ist

$$y_s(t) = \int_{t_0}^{t} z_h(t + t_0 - u)\, g(u)\, \mathrm{d}u$$

eine Lösung von $y'' + ay' + by = g(t)$ auf I.

Beispiel:

Gesucht ist die Lösung von $y'' + y = t$.

Das zugehörige homogene Problem besitzt die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \tag{10.36}$$

$g(t) = t$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, so dass wir zum Beispiel $t_0 = 0$ wählen können.

Fordert man für die homogene Lösung zusätzlich $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$, so erhält man aus (10.36)

$$z_h(t) = \sin t.$$

Mit Satz 10.14 erhält man nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_s(t) = \int_0^t \sin(t-u)\, u \,\mathrm{d}u = t - \sin t.$$

Für die allgemeine Lösung von $y'' + y = t$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_s(t) \\ &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + t - \sin t \\ &= c_1 \cos t + c_3 \sin t + t \qquad\qquad (c_1, c_3 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie auf diese Weise die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y = \frac{1}{\sin t}, \qquad t \in (0, \pi).$$

Hat der Störterm $g(t)$ in

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

eine spezielle Struktur, ist es oft wieder einfacher, eine spezielle Lösung y_s durch einen Ansatz in Form des Störterms zu bestimmen.

Die im Ansatz auftretenden Konstanten sind durch Einsetzen in die Differentialgleichung zu ermitteln.

Oft verwendete Ansätze:

- $g(t)$ ist ein Polynom vom Grad n. Ansatz:

$$y_s(t) = \begin{cases} q(t), & \text{falls } b \neq 0, \\ tq(t), & \text{falls } b = 0 \text{ und } a \neq 0, \\ t^2 q(t), & \text{falls } b = a = 0, \end{cases}$$

  dabei ist q ein Polynom vom Grad n.

- $g(t) = e^{\kappa t} p(t)$ mit einem Polynom p vom Grad n. Ansatz:

$$y_s(t) = \begin{cases} e^{\kappa t} q(t), & \text{falls } c(\kappa) \neq 0, \\ e^{\kappa t} t q(t), & \text{falls } c(\kappa) = 0 \text{ und } c'(\kappa) \neq 0, \\ e^{\kappa t} t^2 q(t), & \text{falls } c(\kappa) = c'(\kappa) = 0, \end{cases}$$

dabei ist q ein Polynom vom Grad n ($c(x) = x^2 + ax + b$).

- $g(t) = e^{\kappa t}[p_1(t)\cos(\omega t) + p_2(t)\sin(\omega t)]$ mit Polynomen p_1, p_2 mit höchstem auftretenden Grad n. Ansatz:

$$y_s(t) = \begin{cases} e^{\kappa t}[q_1(t)\cos(\omega t) + q_2(t)\sin(\omega t)], & \text{falls } c(\kappa + i\omega) \neq 0, \\ t e^{\kappa t}[q_1(t)\cos(\omega t) + q_2(t)\sin(\omega t)], & \text{falls } c(\kappa + i\omega) = 0, \end{cases}$$

dabei sind q_1 und q_2 Polynome vom Grad n.

Ermitteln Sie auf diese Weise die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 2t^2.$$

Formulieren Sie für die Diffentialgleichung

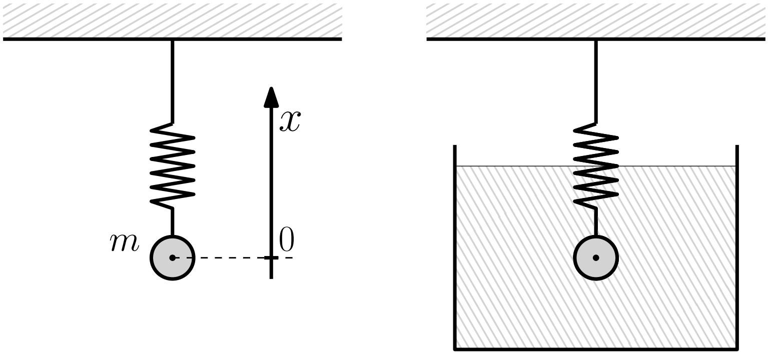
$$y'' - 2y' + y = g(t)$$

passende Ansätze zu folgenden Störtermen:

- $g(t) = \sin t$,
- $g(t) = 3te^t$,
- $g(t) = e^t\bigl(2t\sin(4t) + \cos(4t)\bigr)$.

Inhalt

Wir betrachten noch einmal den Federschwinger von S. 9 f. (links).
Zusätzlich betrachten wir dieselbe Anordnung mit Flüssigkeitsdämpfung (rechts).



In der Flüssigkeit wirkt eine Reibungskraft der Bewegung entgegen.
Diese ist proportional zur Geschwindigkeit (Stokes-Reibung), d. h. $F_R = -\beta x'$.

Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es gilt wieder das Newtonsche Bewegungsgesetz ($F = mx''$), wobei als Kräfte nun Feder- ***und*** Reibungskraft zu berücksichtigen sind:

$$mx'' = -kx - \beta x'.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Standarddarstellung

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (\beta, k > 0). \tag{10.37}$$

Wir analysieren das Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von den Parametern β und k.

Dabei wollen wir speziell auf die zu den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0 \tag{10.38}$$

gehörende Lösung eingehen.

Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

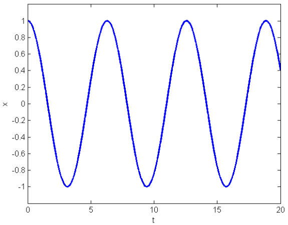
Ungedämpfte Schwingung ($\beta = 0$)

Das entspricht dem auf S. 9 f. diskutierten Fall. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind hier $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, so dass sich als Lösung von (10.37)

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

ergibt. Zu den Anfangsbedingungen (10.38) erhält man die spezielle Lösung

$$x(t) = x_0 \left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$



$$k = m = 1,\ \beta = 0$$
$$x_0 = 1$$

In diesem Fall besitzt das charakteristische Polynom von (10.37) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \frac{i}{2m}\sqrt{4km - \beta^2},$$

so dass sich als allgemeine Lösung (vgl. S. 102)

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}\,t\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}\,t\right)\right)$$

ergibt.
Mit den Anfangsbedingungen (10.38) bestimmt man die Konstanten c_1, c_2 zu

$$c_1 = \frac{\beta x_0}{\sqrt{4km-\beta^2}} \quad \text{und} \quad c_2 = x_0.$$

Analysiert man die Lösung zu den Anfangsbedingungen (10.38), so stellt man fest:

- Je größer die Dämpfung ist, desto schneller klingt die Lösung ab.
- Die Periodendauer der periodischen Anteile ($\sin$ und $\cos$-Terme) wird mit zunehmender Dämpfung größer, nämlich

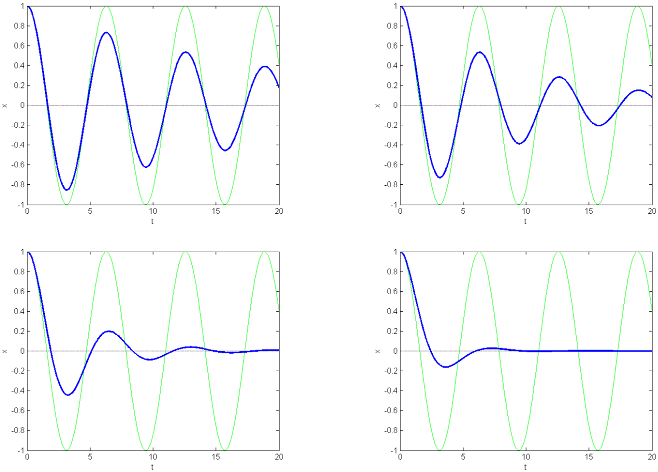
$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km - \beta^2}}$$

  (Für den Fall ohne Dämpfung, d. h. für $\beta = 0$, wäre $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.)

- Da $c_1 \neq 0$ ist, sind die periodischen Terme der gedämpften Schwingung im Vergleich zur ungedämpften Schwingung einer Phasenverschiebung unterworfen.

Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schwache Dämpfung ($\beta^2 < 4km$)



Plots der Lösungen für $\beta = 0.1, 0.2, 0.5$ und 1. Restliche Parameter: $k = m = 1$, $x_0 = 1$.
Zum Vergleich jeweils die Lösung für $\beta = 0$ (grün).

Starke Dämpfung, „Kriechfall" ($\beta^2 > 4km$)

Hier besitzt das charakteristische Polynom von (10.37) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{\beta^2 - 4km},$$

so dass sich als allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\left(-\frac{\beta}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{\beta^2-4km}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{\beta}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{\beta^2-4km}\right)t}$$

ergibt.

Die Lösung zeigt kein „Schwingungsverhalten" mehr und klingt wegen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ exponentiell ab.

Mit den Anfangsbedingungen (10.38) bestimmt man die Konstanten c_1, c_2 zu

$$c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} x_0 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} x_0.$$

Dies ist der Sonderfall (kritische Dämpfung), bei dem sich das qualitative Verhalten der Lösung ändert.

Beim aperiodischen Grenzfall hat das charakteristische Polynom von (10.37) nur eine Nullstelle $\lambda = -\frac{\beta}{2m}$.

Als allgemeine Lösung ergibt sich daher

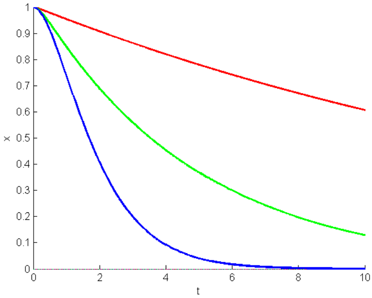
$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{\beta}{2m}t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen (10.38) ergibt sich die spezielle Lösung

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{\beta}{2m}t\right) e^{-\frac{\beta}{2m}t}.$$

Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aperiodischer Grenzfall ($\beta^2 = 4km$)



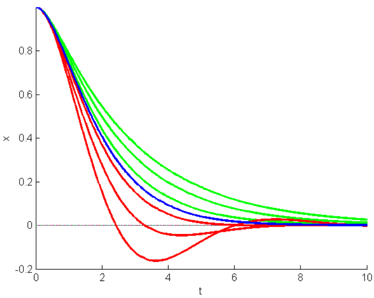


Bild links: Kriechfall für verschiedene Dämpfungen, $\beta = 2.001$ (blau), $\beta = 5$ (grün), $\beta = 20$ (rot).

Bild rechts: Aperiodischer Grenzfall ($\beta = 2$, blau), zusammen mit gedämpften Schwingungen ($\beta = 1, 1.4$ und 1.8, rot) und Kriechfall ($\beta = 2.2, 2.6$ und 3, grün).

Weitere verwendete Parameter für beide Bilder: $k = m = 1$, $x_0 = 1$

Wir betrachten noch einmal den ungedämpften Fall ($\beta = 0$), setzen die Masse aber zusätzlich einer periodischen Kraft $F = F_0 \sin \omega_E t$ aus. Die Konstante ω_E heißt Erregerkreisfrequenz.

Mit der Abkürzung $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (Eigenkreisfrequenz) erhalten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_E t) \tag{10.39}$$

Die Lösung des homogenen Problems kennen wir bereits:

$$x_h(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t),$$

so dass wir nur noch eine spezielle Lösung x_s von (10.39) benötigen. Wir verwenden dafür die Ansätze auf S. 109.

Für $\omega_E \neq \omega_0$ verwenden wir den Ansatz

$$x_s(t) = A\sin(\omega_E t) + B\cos(\omega_E t)$$

und erhalten $x_s(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \sin(\omega_E t)$ bzw.

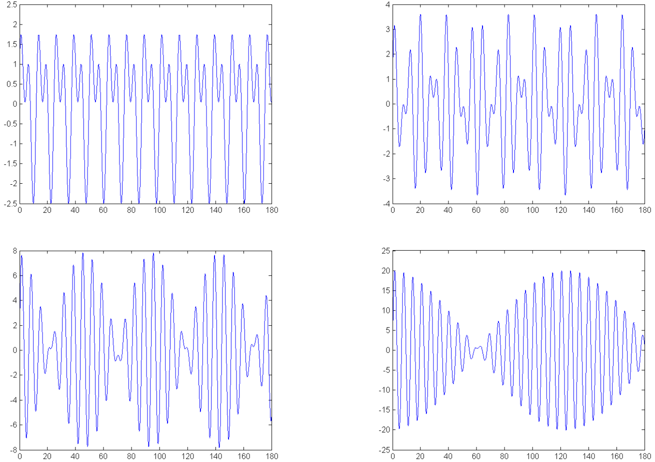
$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \sin(\omega_E t).$$

Die Amplitude von x_s ist offenbar umso größer, je näher ω_E bei ω_0 liegt, genauer gilt sogar

$$\left| \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \right| \to \infty \quad \text{für } \omega_E \to \omega_0.$$

Um einige Bilder zeichnen zu können, bestimmen wir auch noch die Konstanten zur Anfangsbedingung (10.38):

$$c_1 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \cdot \frac{\omega_E}{\omega_0} \quad \text{und} \quad c_2 = x_0.$$



Lösungen von (10.39) mit $\frac{F_0}{m} = 1$, $x_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, und $\omega_E = 0.5, 0.7, 0.87$ und 0.95.
Beachten Sie die verschiedenen Skalierungen der y-Achse.

Im Resonanzfall $\omega_E = \omega_0$ wird man für x_s folgenden Ansatz wählen:

$$x_s(t) = t(A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert dann $A = \frac{F_0}{2m\omega_0}$ und $B = 0$ bzw.

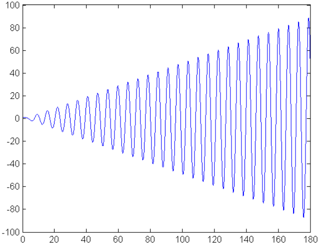
$$x(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t - \frac{F_0}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

Diese Lösung ist für $t \to \infty$ unbeschränkt!

Zum Zeichnen eines Bildes berechnen wir noch die Konstanten zur Anfangsbedingung (10.38):

$$c_1 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad \text{und} \quad c_2 = x_0.$$

Für das gleiche System wie auf S. 123 mit $\omega_E = \omega_0 = 1$ ergibt sich folgender Verlauf der Lösung:



Das schwingende System schwingt sich also mit zunehmender Zeit immer weiter auf (Resonanzkatastrophe).

In der Praxis wird dem natürlich eine Grenze gesetzt, z. B. durch das Anstoßen der Kugel an der Aufhängung oder durch den Bruch der Feder.

Für gedämpfte Systeme kann man ebenfalls Resonanzen untersuchen. Hier bleibt die Amplitude zwar grundsätzlich beschränkt, für kleine Dämpfungen aber u.U. auf sehr hohem Niveau.

Übersteigt die Amplitude das vom System verkraftbare Maß, so kommt es auch hier zur Zerstörung – erinnern Sie sich?

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Nachbereitung):

- die grundlegenden Begriffe zu Differentialgleichungen beherrschen (z. B. spezielle und allgemeine Lösung, AWP),
- die hier behandelten Typen von Differentialgleichungen sicher klassifizieren können,
- grob über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von AWP bescheidwissen,
- wissen, was man unter einem Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung versteht,
- grob über das Euler-Verfahren bescheidwissen (evtl. auch ein kleines Programm schreiben können),
- Trennung der Variablen mit all ihren Facetten sicher anwenden können,
- lineare Differentialgleichungen mit Trennung der Variablen und Variation der Konstanten sicher lösen können,

Ziele erreicht?

- lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sicher lösen können,
- wissen, wie man lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten löst (diagonalisierbarer Fall reicht),
- einen Überblick über die Anwendung von Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften besitzen.