TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Max Winkler, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz
Dipl.-Math. Ailyn Stötzner, Dipl.-Math. Michael Quellmalz

7. Juni 2018

Mathematik II (für IF, ET und Ph)

Sommersemester 2018

7. Übung: Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Die Abkühlung eines erhitzten Körpers in einer (kälteren) Umgebung sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur des Körpers auf!

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

(c) In welcher Zeit kühlt ein auf $100\,^\circ C$ erhitzter Körper auf $30\,^\circ C$ ab, wenn er bereits nach einer Stunde auf $60\,^\circ C$ abgekühlt ist und die Raumtemperatur $20\,^\circ C$ beträgt?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$N(t) = \frac{K}{1 + C\,\mathrm{e}^{-rt}}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

Lösungen der *logistischen Differentialgleichung*

$$N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \qquad K > 0,\ r > 0,$$

sind. Berechnen Sie die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $N(0) = \frac{K}{10}$.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $y'(t) = -\frac{t}{y}$ und zeichnen Sie einige Isoklinen ein. Für welche Anfangspunkte $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren Lösungen der Differentialgleichung und wie verlaufen diese?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

(a) $y' = ty^2$, (b) $y' - y\cos(t) = 3\cos(t), \quad y(0) = 5$, (c) $f'(t) = \frac{tf(t)}{1-t^2}, \quad f(0) = 42$,

(d) $2y'\sqrt{t} = y, \quad y(4) = 1$, (e) $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$.

Aufgabe 5

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Führen Sie zunächst die angegebene Variablensubstitution durch, um eine für die Trennung der Veränderlichen geeignete Struktur der Differentialgleichung zu erhalten.

(a) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad z = \frac{y}{t},$

(b) $ty' = y(1 + \ln y - \ln t), \quad z = \frac{y}{t},$

(c) $y' = \frac{1}{2}(t + 2y)^2, \quad z = t + 2y.$