

Mathematik II (für IF, ET und Ph)
Sommersemester 2018

6. Übung: Integralrechnung

Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = 5 - 2\sqrt{5 + \cos x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}}$ ist.
- (b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2} dx$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgende Ungleichungen:

- (a) $\sin(x) \leq x$ für $x \in (0, \infty)$, (b) $\exp(x) > 1 + x$ für $x \in (0, \infty)$,
(c) $1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$ für $x \in (1, \infty)$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels Substitution. Führen Sie für die unbestimmten Integrale eine Probe für Ihr Ergebnis durch!

- (a) $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$, (b) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 - 8} dx$, (c) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx$, (d) $\int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$,
(e) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$, (f) $\int \tan x dx$, (g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} dx$ (Tipp: Additionstheorem).

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels partieller Integration.

- (a) $\int x e^{-2x} dx$, (b) $\int \sqrt{x} \ln x dx$, (c) $\int_1^e \ln x dx$, (d) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$,
(e) $\int \arcsin x dx$ (Tipp: Partielle Integration, dann Substitution).

Aufgabe 5

Integrieren Sie unter Nutzung der Partialbruchzerlegung.

- (a) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$, (b) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx$, (c) $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

Aufgabe 6

Überprüfen Sie folgende Integrale auf Existenz und bestimmen Sie ggf. deren Wert.

- (a) $\int_0^\infty e^{-\pi x} dx$, (b) $\int_0^\infty \sin x dx$, (c) $\int_0^{42} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, (d) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 7

Der neue EDISON wird bei einer Probefahrt aus dem Stand zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Beschleunigung von $a(t) = \frac{2}{1+t}$ bis zum Zeitpunkt $t = 1$ angetrieben und danach mit konstanter negativer Beschleunigung bis zum Stillstand in $t = 3$ abgebremst. Wie lang war die Probestrecke des neuen EDISONS? (Annahme: gerader Weg).

Aufgabe 8

Bond sitzt gelangweilt an der Bar des Casino Royale und betrachtet das seltsame Martiniglas, welches er soeben geleert hat. Sein geübtes Agentenauge schätzt die Höhe des Glases auf ca. 1 und er vermutet richtig, dass die Randkurve des (horizontal gehaltenen) Glases in etwa der Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$$

zwischen $[0, 1]$ folgt. Wieviel Wodka-Martini passt in dieses Glas?

