

# Mathematik II

(für IF, ET, Ph)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2018

**Studiengänge:** B Angewandte Informatik, B Informatik,  
M Informatik für Geistes- und Sozialwissenschaftler, B Biomedizinische Technik,  
B Regenerative Energietechnik, B Elektromobilität, B Elektrotechnik,  
B Computational Science, B Physik



Mathematik!  
TU Chemnitz

## 3 Folgen und Reihen

### 3.1 Folgen

### 3.2 Grenzwerte und Konvergenz

### 3.3 Unendliche Reihen

## 4 Grenzwerte, Stetigkeit und Beispiele reeller Funktionen

### 4.1 Grundlegende Eigenschaften

### 4.2 Grenzwerte reeller Funktionen

### 4.3 Stetigkeit

### 4.4 Elementare Funktionen

- Polynome
- Rationale Funktionen
- Wurzel- und Potenzfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Trigonometrische Funktionen und Arkusfunktionen
- Hyperbel- und Areafunktionen

## 5 Differentialrechnung in einer Variablen

### 5.1 Differenzierbarkeit

### 5.2 Differentiationsregeln

### 5.3 Ableitungen elementarer Funktionen

5.4 Extrema, Wachstum und Krümmung differenzierbarer Funktionen

5.5 Verschiedene Anwendungen

- Kurvendiskussion
- Newton-Verfahren
- Die Regel von de l'Hospital
- Totales Differential und Fehlerfortpflanzung

5.6 Der Satz von Taylor

## 6 Integralrechnung in einer Variablen

6.1 Der Riemannsche Integralbegriff

6.2 Integrationstechniken

6.3 Uneigentliche Integrale

6.4 Volumenberechnung bei Rotationskörpern

6.5 Quadraturformeln – ein erster Einblick

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

- 7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- 7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- 7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

## 8 Potenz- und Fourier-Reihen

- 8.1 Konvergenz von Funktionenfolgen
- 8.2 Potenzreihen
- 8.3 Fourier-Reihen
  - Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
  - Funktionen mit beliebiger Periode
  - Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
  - Komplexe Darstellung

- 3 Folgen und Reihen
- 4 Grenzwerte, Stetigkeit und Beispiele reeller Funktionen
- 5 Differentialrechnung in einer Variablen
- 6 Integralrechnung in einer Variablen
- 7 Differentialgleichungen
- 8 Potenz- und Fourier-Reihen**

## 8 Potenz- und Fourier-Reihen

### 8.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

### 8.2 Potenzreihen

### 8.3 Fourier-Reihen

# Konvergenz von Funktionenfolgen

Im folgenden Kapitel werden wir uns mit Folgen und Reihen (reeller) Funktionen auseinandersetzen.

## Definition 8.1

Eine Folge

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

von Funktionen

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nennen wir **Funktionenfolge** auf  $I$ .

**Notation:**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder kürzer  $(f_n)$ , analog zu Zahlenfolgen.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Punktweise Konvergenz

Wir suchen nach geeigneten Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen.  
Der Naheliegendste ist:

### Definition 8.2

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  auf  $I \subset \mathbb{R}$  heißt **punktweise konvergent** gegen die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I, \quad (8.1)$$

d. h. wenn für jedes  $x \in I$  die Zahlenfolge  $(f_n(x))_n$  gegen  $f(x)$  konvergiert. Die Funktion  $f$  heißt **Grenzfunktion** von  $(f_n)$ .

Äquivalent zu (8.1) ist die Aussage

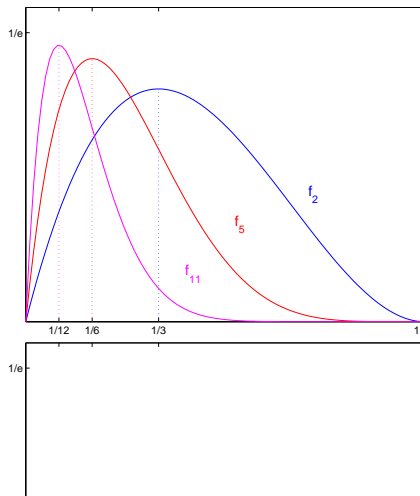
$$|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{für alle } x \in I.$$



# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Punktweise Konvergenz, Beispiele und Probleme

Die Funktionenfolgen  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  (links) und  $f_n(x) = x(1-x)^n$  (rechts) konvergieren auf  $[0, 1]$  beide punktweise gegen  $f(x) = 0$ .



# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Punktweise Konvergenz, Beispiele und Probleme

Punktweise Konvergenz ist generell eine recht schwache Eigenschaft.  
Beispielsweise kann folgendes passieren:

- Die Grenzfunktion  $f$  ist nicht stetig, obwohl es alle Folgenglieder  $f_n$  sind,
- Die Folge der Integrale  $\int_I f_n(x) dx$  konvergiert, aber nicht gegen das Integral  $\int_I f(x) dx$  über die Grenzfunktion.

Illustrieren Sie dies an folgenden Beispielen:

- $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n,$
- $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Gleichmäßige Konvergenz

Die Problemfälle von S. 390 haben gemeinsam, dass die Funktionswerte  $f_n(x)$  auch für große  $n$  nicht gleichmäßig nahe bei  $f(x)$  liegen.

Wir formulieren daher einen strengeren Konvergenzbegriff:

### Definition 8.3

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig konvergent** gegen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

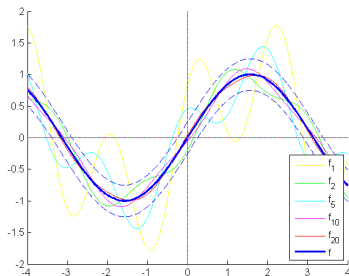
**Erinnerung:** Das Supremum  $\sup M$  einer beschränkten Menge  $M \subset \mathbb{R}$  ist deren kleinste obere Schranke. Falls das Maximum existiert, gilt  $\sup M = \max M$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Beispiel

Die Funktionenfolge  $f_n(x) = \sin x + \frac{1}{n} \sin(3x + n)$  konvergiert auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f(x) = \sin x$ , denn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} |\sin(3x + n)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$



Gezeichnet sind einige Glieder der Funktionenfolge sowie deren Grenzfunktion.

Man beachte, dass ab einem bestimmten  $n$  (hier z.B.  $n \geq 5$ ) alle Funktionsgraphen komplett innerhalb eines beliebig dünnen „ $\epsilon$ -Schlauchs“ um die Grenzfunktion  $f$  verlaufen (blau gestrichelt).

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

### Satz 8.4

*Konvergiert eine Funktionenfolge  $(f_n)$  auf einem Intervall  $I$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann konvergiert sie auch punktweise gegen  $f$ .*

Gleichmäßige Konvergenz ist also „stärker“ als punktweise.

### Satz 8.5

*Konvergieren zwei Funktionenfolgen  $(f_n)$  und  $(g_n)$  auf einem Intervall  $I$  gleichmäßig gegen  $f$  bzw.  $g$ , so konvergieren*

- *die Funktionenfolge  $(f_n \pm g_n)$  gleichmäßig gegen  $f \pm g$ ,*
- *die Funktionenfolge  $(\lambda f_n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , gleichmäßig gegen  $\lambda f$ .*

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

Die gleichmäßige Konvergenz behebt auch die „Mängel“ von S. 390:

### Satz 8.6

*Ist  $(f_n)$  eine auf dem Intervall  $I$  gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion  $f$  auf  $I$  stetig.*

### Satz 8.7

*Ist  $(f_n)$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion  $f$  integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

Schließlich formulieren wir noch ein Ergebnis für die Ableitung bei gleichmäßiger Konvergenz:

### Satz 8.8

*Ist  $(f_n)$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Folge differenzierbarer Funktionen mit Grenzfunktion  $f$ , und ist die abgeleitete Funktionenfolge  $(f'_n)$  auf  $[a, b]$  ebenfalls gleichmäßig konvergent, so ist  $f$  differenzierbar mit*

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (\text{für alle } x \in [a, b]).$$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Funktionenreihen

Wie bei Zahlenfolgen kann man zu einer Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  eine Partialsummenfolge definieren:

$$f_0, \quad f_0 + f_1, \quad f_0 + f_1 + f_2, \quad \dots, \quad \sum_{k=0}^n f_k, \quad \dots$$

Diese Partialsummenfolge nennen wir auch **Reihe der Funktionen**  $f_k$ . Die Funktionen  $f_k$  heißen **Glieder** der Funktionenreihe.

**Notation:**  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  oder  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ , sowohl für die Reihe selbst als auch für deren Grenzwert, genau wie bei reellen Reihen.

**Beispiel:** Bereits bekannt ist die Funktionenreihe  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ .



# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Gliedweises Integrieren und Differenzieren

Da Funktionenreihen spezielle Funktionenfolgen sind, kann man unsere Konvergenzbegriffe wie auch die Sätze 8.4 - 8.8 direkt übertragen.

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent auf  $[a, b]$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f$ .

Dann gelten:

- Sind alle Reihenglieder  $f_k$  stetig, so ist auch die Summenfunktion  $f$  stetig, und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) \, dx.$$

- Sind alle  $f_k$  differenzierbar, und konvergiert die abgeleitete Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$  gleichmäßig auf  $[a, b]$ , dann ist auch die Summe  $f$  differenzierbar und

$$f'(x) = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right]' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x).$$

## 8 Potenz- und Fourier-Reihen

8.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

8.2 Potenzreihen

8.3 Fourier-Reihen

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Potenzreihen

Bei diesen Funktionenreihen wählt man als Glieder Funktionen vom Typ

$$f_k(x) = a_k(x - x_0)^k.$$

Als Teilsummen entstehen Polynome  $n$ -ten Grades:  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$ .

### Definition 8.9

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad (x, x_0, a_k \in \mathbb{R}) \quad (8.3)$$

heißt **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt**  $x_0$  und **Koeffizienten**  $a_k$ .

Die berühmteste Potenzreihe kennen Sie bereits:  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ .

Sie besitzt den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , die Koeffizienten  $a_k = \frac{1}{k!}$  und konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Konvergenzverhalten

Wir untersuchen nun das Konvergenzverhalten von (8.3) in Abhängigkeit von  $x$ , während  $a_k$  und  $x_0$  fest gehalten werden.

### Satz 8.10 (Cauchy-Hadamard\*)

Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

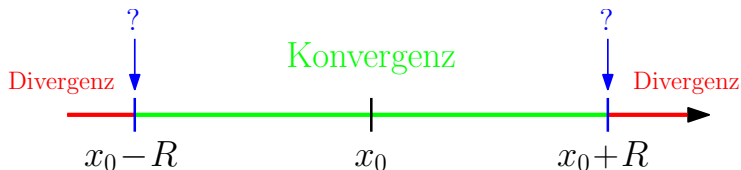
gibt es einen **Konvergenzradius**  $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$  mit folgenden Eigenschaften:

- Die Potenzreihe konvergiert (absolut) für  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .
- Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall  $I \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ .
- Die Potenzreihe divergiert außerhalb  $[x_0 - R, x_0 + R]$  (nur sinnvoll für  $R \neq \infty$ ).

\* Jacques Hadamard, 1865-1963, französischer Mathematiker

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Prinzipiskizze zum Konvergenzverhalten



- Das Intervall  $(x_0 - R, x_0 + R)$  wird auch **Konvergenzintervall** der Potenzreihe genannt.
- Das Konvergenzverhalten an den kritischen Punkten  $x_0 - R$  und  $x_0 + R$  muss immer gesondert untersucht werden.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Berechnung des Konvergenzradius

### Satz 8.11

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Dann gilt:

- $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ , falls fast alle  $a_k$  von Null verschieden sind, und dieser Grenzwert existiert,
- $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ , falls der Grenzwert im Nenner existiert. Dabei sind die Konventionen „ $\frac{1}{\infty} = 0$ “ und „ $\frac{1}{0} = \infty$ “ zu treffen.

**Beweisidee:** Quotienten- bzw. Wurzelkriterium für Zahlenreihen.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Beispiel

Der Konvergenzradius von  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist  $\infty$ . Tatsächlich ergibt sich mit dem erstgenannten Kriterium

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty.$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}.$$

Vergessen Sie nicht, die Randpunkte des Konvergenzintervalls zu untersuchen.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Gliedweises Differenzieren und Integrieren

Die Ergebnisse von S. 397 gelten natürlich auch für Potenzreihen. Es gilt sogar

### Satz 8.12

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  besitze den Konvergenzradius  $R > 0$ . Die Funktion

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

besitzt dann folgende Eigenschaften:

- $f$  ist stetig.
- $f$  ist auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $(x_0 - R, x_0 + R)$  integrierbar, wobei

$$\int f(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C.$$

- $f$  ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}, \quad \text{usw.}$$

Insbesondere ist  $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .



# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Beispiel

Aus der Summenformel für die geometrische Reihe erhält man für

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

die Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Durch gliedweises Differenzieren (Satz 8.12, Punkt 3) erhält man für die Ableitung die Darstellung

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Wie lautet die Potenzreihendarstellung zu  $F(x) = \ln(1-x)$  ( $x_0 = 0$ ,  $|x| < 1$ )?

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Darstellbarkeit durch Potenzreihen

Es stellt sich die Frage, wann z.B. eine unendlich oft differenzierbare Funktion als Potenzreihe geschrieben („in eine Potenzreihe entwickelt“) werden kann.

Aus der Formel in der letzten Zeile von Satz 8.12 ergibt sich, dass für die Koeffizienten immer

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

gelten muss. Die aus Abschnitt 4.6 bekannte **Taylor-Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

ist also der einzige Kandidat für eine mögliche Potenzreihendarstellung von  $f$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Warnungen

Leider gibt es unendlich oft differenzierbare Funktionen, die man nicht als Potenzreihen schreiben kann. Es kann vorkommen, dass

- die Taylor-Reihe den Konvergenzradius  $R = 0$  besitzt, d. h. nur für  $x = x_0$  konvergiert.
- die Taylor-Reihe durchaus konvergiert ( $R > 0$ ), aber nicht gegen die Funktion  $f$  (!!). Ein prominentes Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{für } x \neq 0; \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

für die  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Die Taylorreihe ist somit die konstante Funktion  $\tilde{f} = 0$  und hat mit  $f$  nichts zu tun.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Darstellbarkeit durch Potenzreihen

Wann genau eine unendlich oft differenzierbare Funktion  $f$  durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird, ist schwierig zu charakterisieren.

Wir begnügen uns mit einer hinreichenden Bedingung:

### Satz 8.13

Die Funktion  $f : I = (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$  sei unendlich oft differenzierbar. Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r^k}{k!} \max_{x \in I} |f^{(k+1)}(x)| = 0,$$

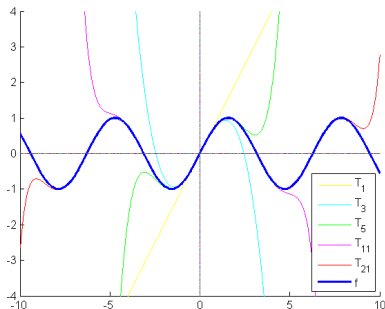
so besitzt die Taylor-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  den Konvergenzradius  $R \geq r$ , und es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in I.$$

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Darstellbarkeit durch Potenzreihen

Man bestimme die Taylorreihe zu  $f(x) = \sin x$  ( $x_0 = 0$ ). Wie verhält es sich mit der Konvergenz? Könnte man diese Potenzreihe auch aus der Formel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  erhalten?



Die Funktion  $f(x) = \sin x$  und einige ihrer Taylorpolynome  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Rechnen mit Potenzreihen

Schließlich kann man Potenzreihen gliedweise addieren und in Produkten von Potenzreihen wie bei endlichen Summen ausmultiplizieren:

### Satz 8.14

Für Summe und Produkt zweier Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$  gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x-x_0)^k$$

bzw.

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

mit  $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0$ .

# Konvergenz von Funktionenfolgen

Rechnen mit Potenzreihen, Beispiel

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \frac{x^9}{22680} + \dots \end{aligned}$$

Bestätigen Sie mindestens die ersten vier Summanden durch detaillierte Rechnung.

# Konvergenz von Funktionenfolgen

## Division von Potenzreihen

Will man die Koeffizienten von

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k}$$

berechnen, formt man zunächst um:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

und führt dann einen Koeffizientenvergleich durch.

Mit Hilfe von

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

berechne man die ersten fünf Koeffizienten der Potenzreihe zu  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  ( $x_0 = 0$ ).



## 8 Potenz- und Fourier-Reihen

8.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

8.2 Potenzreihen

8.3 Fourier-Reihen

- Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
- Funktionen mit beliebiger Periode
- Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
- Komplexe Darstellung

- Die nach dem französischen Mathematiker, Physiker, Ägyptologe und Revolutionär Joseph Fourier (1768–1830) benannte **Fourier-Analyse** ist ein Grundpfeiler der angewandten Mathematik.
- Neben vielfältigen physikalischen Entdeckungen (Wärmelehre) ist Fourier für seine Entdeckung bekannt, dass – selbst unstetige – Funktionen als Überlagerung (Linearkombination, konvergente Reihe) der Funktionen

$$1, \quad \cos(kx), \sin(kx) \quad (k \in \mathbb{N})$$

dargestellt werden können.

- In vielen Anwendungen sind die Koeffizienten für große  $k$  vernachlässigbar klein. Dies gestattet es, Signale in ihre Wellenanteile zu zerlegen, und sie dann zu übermitteln, komprimieren, filtern, entrauschen, analysieren, klassifizieren oder verschlüsseln.
- Die strenge mathematische Begründung der Konvergenz von Fourier-Reihen dauerte bis in die 1960er Jahre (Carleson-Hunt-Theorem).



Joseph Fourier

Wir betrachten Reihendarstellungen für periodische Funktionen, zunächst speziell für  $2\pi$ -periodische Funktionen\*. Als Reihenglieder verwenden wir Funktionen, die selbst  $2\pi$ -periodisch sind:

## Definition 8.15

Eine Reihe der Bauart

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (8.4)$$

mit reellen Konstanten  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt **trigonometrische Reihe**.

Sind alle  $a_k = 0$ , spricht man von einer **Sinusreihe**.

Sind alle  $b_k = 0$ , spricht man von einer **Kosinusreihe**.

Eine Teilsumme (bis zum Index  $k = n$ ) heißt **trigonometrisches Polynom** (vom Grad  $n$ ).

\***Zur Erinnerung:** Das bedeutet  $f(x + 2\pi) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Wir gehen zunächst von einer gegebenen trigonometrischen Reihe aus und bemerken:

### Satz 8.16

*Ist die trigonometrische Reihe (8.4) für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent, so ist*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (8.5)$$

*eine auf  $\mathbb{R}$  definierte  $2\pi$ -periodische Funktion.*

Es macht also umgekehrt nur für  $2\pi$ -periodische Funktionen Sinn, nach Darstellungen der Form (8.5) zu suchen. Für Funktionen wie  $g(x) = x^2$  oder  $h(x) = e^x$  ist dies dagegen zwecklos (es sei denn, man betrachtet die periodische Fortsetzung eines endlichen Abschnitts solcher nichtperiodischer Funktionen).

Der folgende Satz liefert u. a. den Schlüssel zur Berechnung der gesuchten Reihendarstellungen:

### Satz 8.17

*Sind die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  absolut konvergent, so konvergiert die trigonometrische Reihe (8.4) punktweise auf ganz  $\mathbb{R}$ . Die Summenfunktion*

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

*ist dann stetig auf  $\mathbb{R}$ , und es gelten*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}).$$

# Fourier-Reihen

Hintergrund: Orthogonalitätsrelationen in  $L^2(-\pi, \pi)$

Um die Darstellungen in (8.6) zu erhalten, versieht man den Raum  $L^2(-\pi, \pi)$  aller Funktionen  $f$  mit  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty^*$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx. \quad (8.7)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Funktionen  $\sin(nx)$  und  $\cos(mx)$  ( $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ ) diesbezüglich ein Orthonormalsystem bilden, d.h.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ 1, & \text{falls } n = m, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0).$$

Die Darstellung (8.6) der Koeffizienten ergibt sich damit wie in Satz 3.29 aus

$$a_k = \langle f(\cdot), \cos(k \cdot) \rangle \quad \text{und} \quad b_k = \langle f(\cdot), \sin(k \cdot) \rangle.$$

Dieses Orthonormalsystem ist darüberhinaus **vollständig**, d.h. nur die Nullfunktion ist orthogonal zu allen darin enthaltenen Funktionen. Ein solches vollständiges Orthonormalsystem heißt auch **Orthonormalbasis** der Hilbert-Raumes  $L^2(-\pi, \pi)$ .

\*Genaugenommen muss man hier den Lebesgueschen Integralbegriff verwenden.

Wir untersuchen nun für eine vorgegebene  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$ , ob sie sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln lässt.

### Definition 8.18

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische, auf  $[-\pi, \pi]$  integrierbare Funktion. Dann heißen die Zahlen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}),$$

**Fourier-Koeffizienten** von  $f$ . Die Reihe

$$R_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

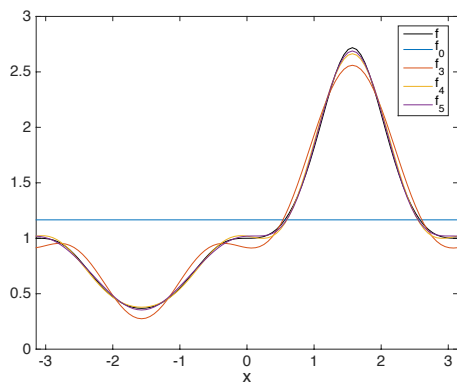
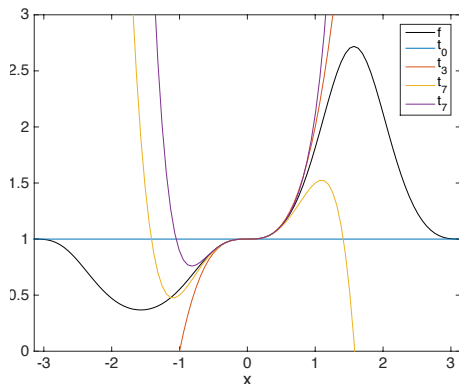
heißt **Fourier-Reihe** von  $f$ .

# Fourier-Reihen

## Taylor-Entwicklung vs. Fourier-Reihe

**Beispiel:** Wir vergleichen die Taylor-Entwicklung an der Stelle  $x_0 = 0$  (links) mit der Fourier-Reihe (rechts) der ( $2\pi$ -periodischen) Funktion

$$f(x) = \exp(\sin^3 x)$$





Da die Integranden die Periode  $2\pi$  besitzen, kann auch jedes andere Intervall der Länge  $2\pi$  als Integrationsbereich verwendet werden.

Das konkrete Rechnen erleichtert häufig:

### Satz 8.19

*Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische, in  $[-\pi, \pi]$  integrierbare, und auf  $(-\pi, \pi)$  gerade [ungerade] Funktion, dann ist die Fourier-Reihe von  $f$  eine Kosinusreihe [eine Sinusreihe].*

Man berechne die Fourier-Reihe zum **Rechteckpuls**

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{für } |x| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{für } \pi/2 \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Wie bei den Taylor-Reihen stellen sich nun folgende Fragen:

- Wann konvergiert die Fourier-Reihe  $R_f(x)$ ?
- Falls sie konvergiert, unter welchen Bedingungen gilt dann auch  $R_f(x) = f(x)$ ?

Zur Beantwortung brauchen wir einen weiteren Begriff:

### Definition 8.20

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $[a, b]$  **stückweise glatt**, wenn es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

von  $[a, b]$  gibt, so dass  $f$  auf jedem der Teilintervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  stetig differenzierbar ist.

### Satz 8.21

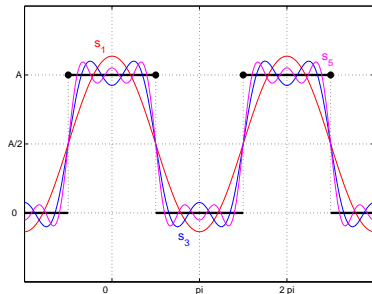
Ist die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise glatt auf  $[-\pi, \pi]$ , so konvergiert ihre Fourier-Reihe  $R_f$  punktweise auf  $\mathbb{R}$ . Dabei gilt

$$R_f(x_0) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right] \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Ist  $f$  stetig in  $x_0$ , so folgt insbesondere  $R_f(x_0) = f(x_0)$ .

### Beispiel:

Teilsummen der Fourierentwicklung zum Rechteckpuls, vgl. Bsp. S. 421.



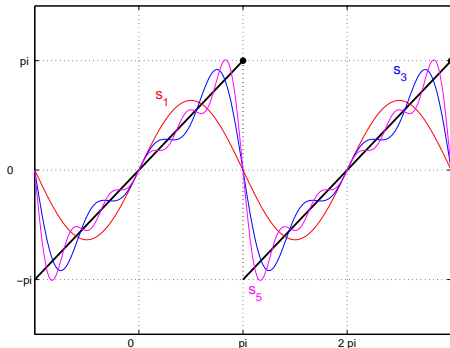
# Fourier-Reihen

## Weiteres Beispiel

Für die **Sägezahnfunktion**  $f(x) = x$  ( $|x| \leq \pi$ ) ergibt sich

$$a_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0) \quad \text{sowie} \quad b_k = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Auch hier stellen wir die ersten Teilsommen dar:

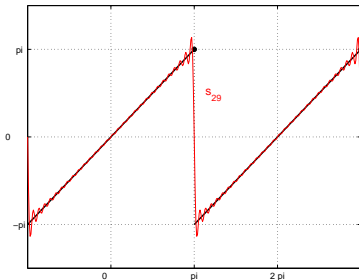
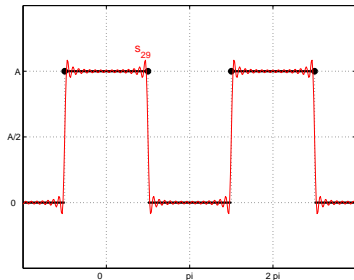


**Anmerkung:** Tabellen wichtiger Fourierreihen findet man in gängigen Tafelwerken, z. B. Merziger et al., S. 78 ff.

# Fourier-Reihen

## Exkurs: Gibbssches Phänomen\*

Wir betrachten die Teilsummen  $s_{29}$  für Rechteckpuls und Sägezahnfunktion:



In einer kleinen Umgebung der Sprungstelle „überschwingen“ die Partialsummen  $s_n$  um etwa 9% der Sprunghöhe („overshoot“).

Dieses **Gibbsche Phänomen** verschwindet nicht für  $n \rightarrow \infty$ , bewegt sich aber näher an die Sprungstelle.

\* Josiah Willard Gibbs, 1839-1903, US-amerikanischer Physiker

Ein typisches Problem, welches durch Überschwingen verursacht wird, sind Artefakte im JPG-Bildformat in der Nähe scharfer Kanten.



Grund ist u. a. die Verwendung einer Kosinustransformation im Kompressionsalgorithmus, die ganz ähnliche Eigenschaften wie die Fouriertransformation aufweist.

Insbesondere für qualitativ hochwertige Balkengrafiken und Diagramme ist JPG daher ein denkbar ungeeignetes Format.

# Fourier-Reihen

## Fourier-Entwicklung von Funktionen mit beliebiger Periode

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodisch mit Periode  $T$ , bestimmt man die

$$\text{Kreisfrequenz } \omega := \frac{2\pi}{T}$$

und entwickelt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)],$$

wobei

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_s^{s+T} f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_s^{s+T} f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$\text{sowie } b_k = \frac{2}{T} \int_s^{s+T} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Man nennt  $\omega$  die Kreisfrequenz der Grundschwingung und  $k\omega$  ( $k > 1$ ) die Kreisfrequenzen der harmonischen Oberschwingungen. Die Zahl  $s \in \mathbb{R}$  ist beliebig.

# Fourier-Reihen

## Besselsche Ungleichung und Gleichung

### Satz 8.22

Für jede Funktion  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  mit den Fourier-Koeffizienten  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gilt die *Besselsche Ungleichung*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (8.8)$$

Aus der Vollständigkeit unserer Orthonormalbasis  $\{\cos(kx), k \in \mathbb{N}_0; \sin(kx), k \in \mathbb{N}\}$  folgt aus der Besselschen Ungleichung für  $n \rightarrow \infty$

### Satz 8.23

Für jede Funktion  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  mit den Fourier-Koeffizienten  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gilt die *Parsevalsche Gleichung*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (8.9)$$

Gleichung (8.9) (eigentlich bereits (8.8)) zeigt, dass die Fourier-Koeffizienten von  $L^2$ -Funktionen Nullfolgen bilden.



### Satz 8.24

Die Fourier-Reihe einer stetigen, stückweise glatten  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  konvergiert gleichmäßig und absolut gegen  $f$ . Für ihre Fourier-Koeffizienten  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergieren ferner die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|, \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

Mit der Definition der **Supremumsnorm** auf einem reellen Intervall  $I$

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in I} |f(x)|$$

und der Bezeichnung  $R_f^n(x)$  für die  $n$ -te Teilsumme der Fourier-Reihe einer Funktion  $f$  lässt sich die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe gegen  $f$  ausdrücken als

$$\|f - R_f^n\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad n \rightarrow \infty.$$

# Fourier-Reihen

## Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel

Eine weitere Norm für Funktionen auf  $[-\pi, \pi]$  ist die zum Skalarprodukt (8.7) gehörende  $L^2$ -Norm

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Konvergenz in dieser Norm bezeichnet man als **Konvergenz im quadratischen Mittel**.

### Satz 8.25

*Die Fourier-Reihe einer Funktion  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f$ .*

# Fourier-Reihen

## Approximation quadratischen Mittel

Die Teilsummen  $R_f^n$  der Fourier-Reihe einer Funktion  $f$  bilden ein trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$ . Jede dieser Teilsummen besitzt die Optimalitätseigenschaft, dass sie die unter allen trigonometrischen Polynomen von Grad  $n$

$$T_n(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n [\tilde{a}_k \cos(kx) + \tilde{b}_k \sin(kx)]$$

die Funktion  $f$  in der  $L^2$ -Norm am besten approximieren:

### Satz 8.26

Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  wird der Quadratmittelfehler

$$\|f - T_n\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

genau dann minimal, wenn  $T_n = R_f^n$ . Ferner gilt

$$\|f - R_f^n\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

# Fourier-Reihen

## Gliedweise Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit

- Die Fourier-Reihe einer stetigen, stückweise glatten periodischen Funktion ist gliedweise integrierbar (gleichmäßige Konvergenz).
- Für die gliedweise Differenzierbarkeit muss auch die Reihe der Ableitungen gleichmäßig konvergieren.
- Dies ist oft nicht erfüllt, etwa bei der Modellierung unstetiger oder nichtdifferenzierbarer periodischer Vorgänge.

Wann kann eine Fourier-Reihe dennoch gliedweise integriert/differenziert werden?  
Für die Integration gilt

### Satz 8.27

*Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe  $R(x)$  kann gliedweise integriert werden und es gilt*

$$F(x) := \int_0^x R(t) dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k},$$

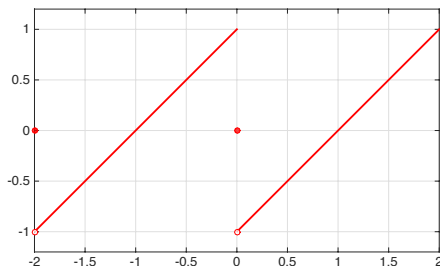
*wobei die Reihe gleichmäßig für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $F(x)$  konvergiert.*

**Beispiel:** Ungerade fortgesetzte 2-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Fourier-Reihe

$$R_f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x)}{k}$$



konvergiert an allen Stetigkeitsstellen, also insbesondere in  $(0, 2)$ , punktweise gegen  $f(x) = x - 1$ . Die Ableitungsreihe

$$R_{f'}(x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi x)$$

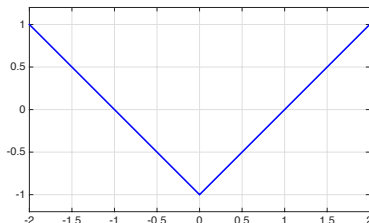
divergiert an der Stelle  $x = 1$ , obwohl  $f$  dort stetig, sogar differenzierbar ist.

**Beispiel:** Gerade und stetig fortgesetzte 4-periodische Funktion

$$\tilde{f}(x) = |x| - 1.$$

Fourier-Reihe

$$R_{\tilde{f}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$$



Ableitungsreihe

$$R_{\tilde{f}'}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}x\right)}{2k-1}$$

konvergiert (Leibniz-Kriterium) an der Stelle  $x = 1$  gegen  $\tilde{f}'(1) = 1$ .

### Satz 8.28

*Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe, die eine Funktion  $f$  darstellt, kann man nur dann gliedweise an einer Stelle  $x$  differenzieren, wenn die Ableitungsreihe im Punkt  $x$  konvergent ist. Im Fall der Konvergenz stellt die Ableitungsreihe  $f'(x)$  dar. Hinreichend für die Konvergenz der Ableitungsreihe ist die Stetigkeit und die stückweise stetige Differenzierbarkeit von  $f'$ .*

# Fourier-Reihen

## Komplexe Darstellung reeller Fourier-Reihen

Periodische Funktionen mit Werten in den komplexen Zahlen lassen sich ebenfalls in einer Fourier-Reihe entwickeln. Aufgrund der Beziehung zwischen der Sinus-, Kosinus- und Exponentialfunktion besitzt die komplexe Schreibweise sogar eine einfachere Form als jeweils eine reelle Fourier-Reihe für Real- und Imaginärteil.

Besitzt die stückweise glatte  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

so lassen sich Sinus und Kosinus vermöge der Eulerschen Formel ausdrücken durch

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

und wir erhalten nach Einsetzen



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right]. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$b_0 := 0, \quad a_{-k} := a_k, \quad b_{-k} := -b_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8.10)$$

sowie  $c_k := (a_k - ib_k)/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , und erhalten

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (8.11)$$

wobei der Grenzwert als  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx}$  zu verstehen ist.

- Durch Multiplikation von (8.11) mit  $e^{-inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , Integration über  $[-\pi, \pi]$ , Vertauschung von Integration und Summation erhält man die komplexe Darstellung der Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8.12)$$

- Formel (8.12) gilt unter denselben Voraussetzungen wie die entsprechenden Formeln für  $a_k$  und  $b_k$ .
- Für die Rückrechnung erhalten wir

$$a_k = 2 \operatorname{Re} c_k, \quad b_k = -2 \operatorname{Im} c_k \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- An (8.10) erkennt man sofort, dass für reelle Funktionen  $f$  gilt  $c_k = \overline{c_{-k}}$ .
- Die Konvergenzsätze 8.21 und 8.24 gelten unverändert für die komplexe Darstellung.

# Fourier-Reihen

## Komplexe Darstellung reeller Fourier-Reihen

Oft ist es praktischer, auch bei der Modellierung reellwertigen periodischer Funktionen  $f = f(t)$  direkt die komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

mit einer Kreisfrequenz  $\omega > 0$  anzusetzen. So lassen sich etwa die Fourier-Reihe einer phasenverschobene Schwingungen  $g(t) = f(t - t_0)$  leicht darstellen als

$$g(t) = f(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{[c_k e^{-ik\omega t_0}]}_{=: \tilde{c}_k} e^{ik\omega t},$$

was mit der trigonometrischen Variante deutlich umständlicher ginge.

Außer bei der Feststellung, dass bei reellen Funktionen die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k = \overline{c_{-k}}$  erfüllen, wurde bisher an keiner Stelle verwendet, dass die betrachteten Funktionen reellwertig sind. Wir können daher viele der hergeleiteten Ergebnisse auf periodische Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

übertragen.

Bei den Integralformeln für die Koeffizienten  $c_k$  ist lediglich zu beachten, dass Real- und Imaginärteile für sich integriert werden, d.h.

$$\int f(t) dt = \int \operatorname{Re} f(t) dt + i \int \operatorname{Im} f(t) dt$$

### Satz 8.29 (Rechenregeln)

Sind  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zwei  $T$ -periodische, stückweise glatte Funktionen mit den Fourier-Reihen  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\omega t}$  und  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\omega t}$  mit  $\omega = 2\pi/T$ , so gelten

❶  $\alpha f + \beta g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha f_k + \beta g_k) e^{ik\omega t}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . (Linearität)

❷  $\overline{f(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{f_{-k}} e^{ik\omega t}$ , (Konjugation)

❸  $f(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{-k} e^{ik\omega t}$ , (Zeitumkehr)

❹  $f(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\alpha\omega t}$ , (Streckung, Ähnlichkeit)

❺  $f(t + \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{ik\omega\tau} f_k) e^{ik\omega t}$ , (Translation, Phasenverschiebung)

❻  $e^{in\omega t} f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k-n} e^{ik\omega t}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . (Translation im Frequenzbereich)

Verbindung zu  $2\pi$ -periodischen Funktionen: Besitzt  $f$  die Periode  $T$ , so besitzt  $F(t) := f(\frac{t}{\omega})$  die Periode  $2\pi$ .

### Satz 8.30

Sind  $f$  und  $g$  zwei  $T$ -periodische, stückweise stetige Funktionen mit den Fourier-Reihen  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\omega t}$  und  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\omega t}$ , so gelten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \overline{g_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (8.13)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad (\text{Parsevalsche Gleichung}). \quad (8.14)$$

- Aus (8.14) folgt für reellwertige Funktionen die schon behandelte reelle Version der Parsevalschen Gleichung (8.9).
- Die Verbindung zwischen (8.14) und (8.9) ergibt sich durch Einsetzen der Beziehung  $c_k = (a_k - ib_k)/2$  und Zusammenfassung der Summanden mit Indices  $k$  und  $-k$ .

- In technischen Anwendungen liegen Funktionen (Signale) typischerweise nicht in kontinuierlicher Form vor, sondern als diskrete Messwerte oder als digitale Daten.
- Da die Abtastrate oft gleichabständig ist gehen wir von einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f = f(x)$  aus, für die die Funktionswerte  $y_j = f(x_j)$  an den  $N + 1$  Punkten

$$x_j = j \cdot \frac{2\pi}{N}, \quad j = 0, \dots, N$$

gegeben sind. Aufgrund der Periodizität gilt  $y_0 = y_N$ .

- Dabei ist es eigentlich egal, ob die Funktionswerte  $\{y_j\}_{j=0}^N$  nur als Messwerte oder durch Auswertung einer expliziten Formel für  $f$  an den Stützstellen  $x_j$  entstanden sind.
- Ziel ist es nun, die diskreten Werte in analoger Weise durch eine geeignete Orthogonalbasis darzustellen und ggf. durch Abschneiden zu approximieren.

# Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- die Begriffe Funktionenfolge und -reihe gut verstanden haben,
- zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz unterscheiden können und einfache Funktionenfolgen darauf untersuchen können,
- über die Konvergenzeigenschaften einer Potenzreihe bescheidwissen und Konvergenzradien sicher bestimmen können,
- Funktionen in Potenzreihen (Taylorreihen) entwickeln und mit Potenzreihen sicher rechnen können,
- den Begriff der trigonometrischen Reihe verstanden haben,
- die Fourierreihen zu stückweise glatten,  $2\pi$ -periodischen Funktionen berechnen können und über deren Konvergenz bescheidwissen,
- hinreichende Kriterien zu gleichmäßiger Konvergenz bzw. Konvergenz im quadratischen Mittel kennen,



# Ziele erreicht?

- hinreichende Kriterien zur gliedweisen Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit von Fourier-Reihen kennen,
- reelle und komplexe Darstellung von Fourier-Reihen ineinander Umrechnen können,