

# Mathematik II

(für IF, ET, Ph)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2018

**Studiengänge:** B Angewandte Informatik, B Informatik,  
M Informatik für Geistes- und Sozialwissenschaftler, B Biomedizinische Technik,  
B Regenerative Energietechnik, B Elektromobilität, B Elektrotechnik,  
B Computational Science, B Physik



Mathematik!  
TU Chemnitz

## 3 Folgen und Reihen

### 3.1 Folgen

### 3.2 Grenzwerte und Konvergenz

### 3.3 Unendliche Reihen

## 4 Grenzwerte, Stetigkeit und Beispiele reeller Funktionen

### 4.1 Grundlegende Eigenschaften

### 4.2 Grenzwerte reeller Funktionen

### 4.3 Stetigkeit

### 4.4 Elementare Funktionen

- Polynome
- Rationale Funktionen
- Wurzel- und Potenzfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Trigonometrische Funktionen und Arkusfunktionen
- Hyperbel- und Areafunktionen

## 5 Differentialrechnung in einer Variablen

### 5.1 Differenzierbarkeit

### 5.2 Differentiationsregeln

### 5.3 Ableitungen elementarer Funktionen

5.4 Extrema, Wachstum und Krümmung differenzierbarer Funktionen

5.5 Verschiedene Anwendungen

- Kurvendiskussion
- Newton-Verfahren
- Die Regel von de l'Hospital
- Totales Differential und Fehlerfortpflanzung

5.6 Der Satz von Taylor

## 6 Integralrechnung in einer Variablen

6.1 Der Riemannsche Integralbegriff

6.2 Integrationstechniken

6.3 Uneigentliche Integrale

6.4 Volumenberechnung bei Rotationskörpern

6.5 Quadraturformeln – ein erster Einblick

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

- 7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- 7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- 7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

## 8 Potenz- und Fourier-Reihen

- 8.1 Konvergenz von Funktionenfolgen
- 8.2 Potenzreihen
- 8.3 Fourier-Reihen
  - Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
  - Funktionen mit beliebiger Periode
  - Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
  - Komplexe Darstellung

- 3 Folgen und Reihen
- 4 Grenzwerte, Stetigkeit und Beispiele reeller Funktionen
- 5 Differentialrechnung in einer Variablen
- 6 Integralrechnung in einer Variablen
- 7 Differentialgleichungen**
- 8 Potenz- und Fourier-Reihen

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen spielen bei vielen technischen und naturwissenschaftlichen Problemen eine zentrale Rolle.

Grob gesprochen handelt es sich um Gleichungen, die Funktionen mit ihren Ableitungen verknüpfen. Entsprechend sind die Lösungen von Differentialgleichungen wieder Funktionen.

Man unterscheidet je nach Anzahl der Variablen in der gesuchten Funktion **gewöhnliche** und **partielle** Differentialgleichungen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängt.

## 7 Differentialgleichungen

### 7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

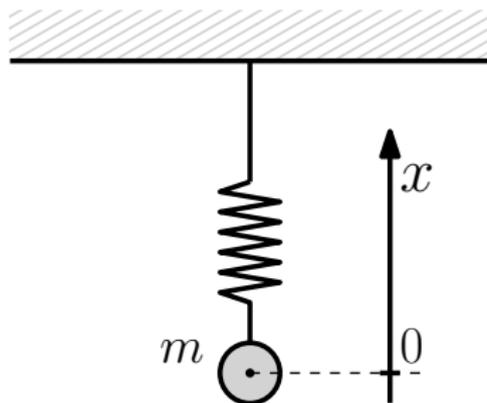
7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

Wir analysieren die Bewegung eines „Federschwingers“:



- Die Bewegung erfolge nur in  $x$ -Richtung.
- Der Nullpunkt der  $x$ -Achse sei durch die Ruhelage der Masse  $m$  festgelegt.
- Durch diese Wahl des Nullpunkts wird u. a. der Einfluss der Schwerkraft implizit berücksichtigt.

Die Bewegung der Masse im Zeitverlauf wird in erster Linie durch das Newtonsche Gesetz der Bewegung („Kraft = Masse · Beschleunigung“) bestimmt:

$$F = m x''(t).$$

Als Kraft ist die (rücktreibende) Federkraft  $F = -kx(t)$  anzusetzen ( $k$  die Federkonstante). Insgesamt ergibt sich die Differentialgleichung

$$x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (7.1)$$

Leicht erkennt man, dass jede Funktion der Form

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (7.2)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (7.1) ist. Wir werden später sehen, dass sogar jede Lösung von (7.1) von dieser Bauart ist.

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Einführende Beispiele

In der Realität werden wir aber immer genau einen Bewegungsablauf beobachten. Diese eindeutige Lösung der Differentialgleichung erhalten wir durch das Setzen zusätzlicher Bedingungen.

Beispielsweise könnte man Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit  $t = 0$  vorgeben, z. B.

$$x(0) = 42, \quad x'(0) = 0. \quad (7.3)$$

Die zu diesen Anfangsbedingungen gehörende eindeutige Lösung lautet

$$x(t) = 42 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \quad (7.4)$$

Es ist also ein kosinusförmiger Schwingungsverlauf zu erwarten.

Versuchen Sie, die Darstellung (7.4) durch Einsetzen der Anfangsbedingungen in (7.2) zu erhalten.

### **Vorgehen bei der Anwendung von Differentialgleichungen:**

Das Beispiel des Federschwingers illustriert bereits, welche Schritte man bei der Anwendung von Differentialgleichungen i. A. zu gehen hat\*:

- mathematische Modellierung des naturwissenschaftlichen Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung,
- Formulierung sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen,
- Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen (der Inhalt dieses Kapitels),
- Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung.

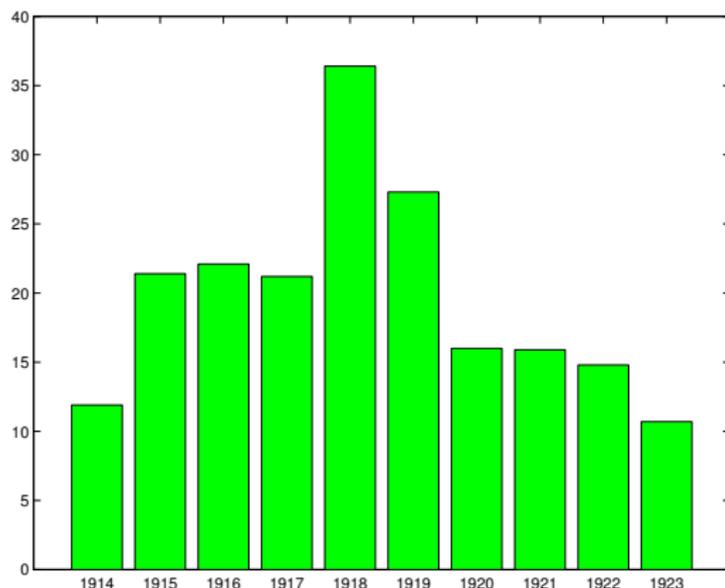
Wir werden das Vorgehen an einem weiteren Beispiel aus der Biologie verdeutlichen.

\* übernommen aus Bärwolff, Höhere Mathematik, Kapitel 6.1

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Einführende Beispiele: Lotka-Volterra-Gleichungen

Umberto d'Ancona ermittelte 1925 den prozentualen Anteil der Haie am Gesamtfang (Speisefische und Haie) im Hafen von Triest wie folgt:



Benachteiligt eingeschränkter Fischfang (1. Weltkrieg) die Speisefische?

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Einführende Beispiele: Lotka-Volterra-Gleichungen

Die mathematische Modellierung erfolgt über ein **Räuber-Beute-Modell** (Vito Volterra, 1860–1940). Seien

$x(t)$  : Beutepopulation zur Zeit  $t$  (Speisefische),

$y(t)$  : Räuberpopulation zur Zeit  $t$  (Haie).

Ohne Räuber würde sich die Beutepopulation nach dem Malthusianischen Gesetz (Thomas Robert Malthus, 1766–1834) vermehren:

$$x'(t) = a x(t) \quad (\text{mit einer Konstanten } a > 0),$$

d.h. der Zuwachs wäre proportional zum Bestand bzw. das Wachstum wäre exponentiell

$$x(t) = x(0) e^{at} \quad \text{für } t \geq 0.$$

(Das Modell ist natürlich nur eingeschränkt realistisch, etwa falls die Population nicht sehr dicht und ausreichend Nahrung vorhanden ist).

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Einführende Beispiele: Lotka-Volterra-Gleichungen

Die Dezimierung der Beutepopulation wie auch das Wachsen der Räuberpopulation ist proportional zur Anzahl der Räuber-Beute-Kontakte, und damit zum Produkt

$$x(t)y(t).$$

Als mathematisches Modell (zunächst ohne Fischfang) ergibt sich somit das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x'(t) &= a x(t) - b x(t)y(t), & (a, b > 0), \\y'(t) &= -c y(t) + d x(t)y(t), & (c, d > 0).\end{aligned}\tag{7.5}$$

Eine eindeutige Lösung ergibt sich wieder, wenn man noch Anfangsbedingungen fordert. Infrage kommen z.B. Werte für  $x$  und  $y$  zur Zeit  $t = 0$ .

Diskutieren Sie, warum das Minuszeichen vor  $c$  in (7.5) korrekt ist.

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Einführende Beispiele: Lotka-Volterra-Gleichungen

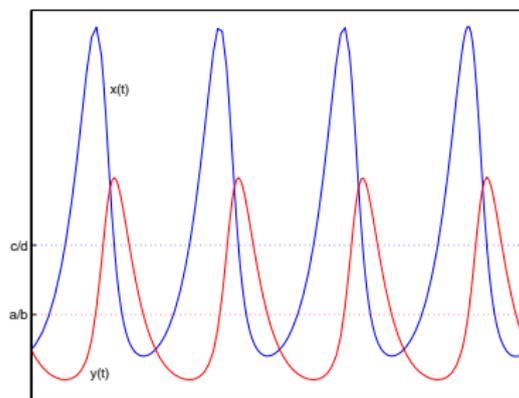
Es lässt sich zeigen, dass die Lösungen periodisch sind, d.h. es existiert eine **Periodendauer**  $T > 0$  sodass

$$x(t) = x(t + T), \quad y(t) = y(t + T).$$

Ferner gelten für die **Mittelwerte** der Populationsgrößen die Beziehungen

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \, dt = \frac{c}{d} \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \, dt = \frac{a}{b}.$$

Die Lösung des Systems von Differentialgleichungen (7.5) erfolgt auf numerischem Wege (dazu später). Typische Lösungen sehen wie folgt aus:



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Einführende Beispiele: Lotka-Volterra-Gleichungen

Moderaten Fischfang mit einer Rate  $0 < e < a$  kann man im System (7.5) berücksichtigen durch die Modifikation

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) - ex(t) = (a - e)x(t) - bx(t)y(t), \\y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) - ey(t) = -(c + e)y(t) + dx(t)y(t).\end{aligned}\quad (7.6)$$

Strukturell ist dies das gleiche System wie (7.5), nur mit den Koeffizienten  $a - e$  anstelle von  $a$  sowie  $c + e$  anstelle von  $c$ .

Für die neuen Mittelwerte ergibt sich also

$$\bar{x}_F = \frac{c + e}{d} > \frac{c}{d} = \bar{x} \quad \text{und} \quad \bar{y}_F = \frac{a - e}{b} < \frac{a}{b} = \bar{y}.$$

Eine Rückübertragung auf das Ausgangsproblem könnte lauten:

### Volterras Prinzip

Angemessener Fischfang ( $e < a$ ) steigert die mittlere Zahl der Speisefische und reduziert die durchschnittliche Zahl der Haie.

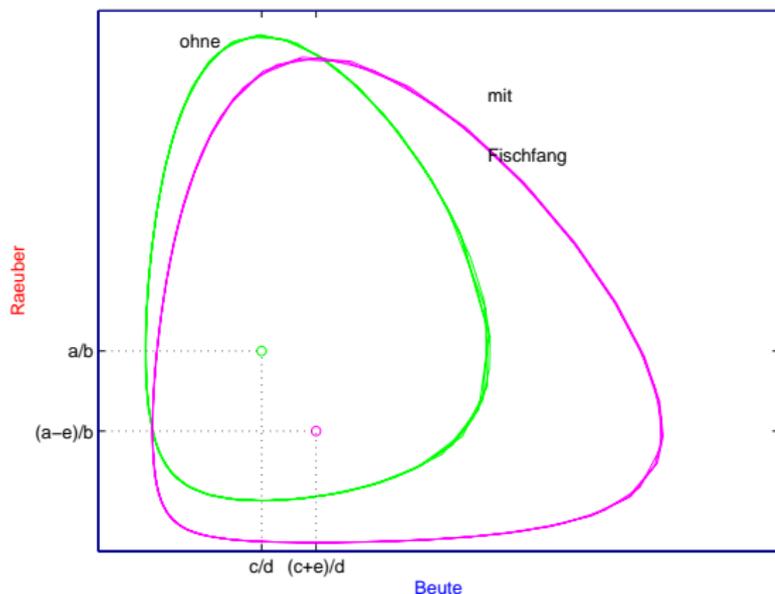
# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Einführende Beispiele: Lotka-Volterra-Gleichungen

Ein **Phasendiagramm** der Lösung, d.h. die Darstellung der Kurve

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

verdeutlicht noch einmal Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Lösungen:



## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

**7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen**

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

### Definition 7.1

Ein Ausdruck der Form

$$F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (7.7)$$

mit einer Funktion  $F : \mathbb{R}^{n+2} \supset M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gewöhnliche Differentialgleichung**  $n$ -ter Ordnung.

Eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $y : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Lösung** von (7.7) über dem Intervall  $I$ , wenn

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Begriffe und Lösbarkeitsfragen

Liegt eine Differentialgleichung wie (7.7) in nach der höchsten Ableitung aufgelösten Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

vor, so spricht man von einer **expliziten** Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, während man bei (7.7) von der **impliziten** Form spricht.

Die Menge aller Lösungen von (7.7) über dem Intervall  $I$  heißt **allgemeine Lösung**. Ist die Differentialgleichung von  $n$ -ter Ordnung, beinhaltet sie i.A.  $n$  freie Parameter, die sogenannten **Integrationskonstanten**.

Ist  $f$  eine stetige Funktion mit Stammfunktion  $F$ , so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y'(t) = f(t)$  gegeben durch

$$y(t) = F(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Begriffe und Lösbarkeitsfragen

Um für eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung eine eindeutig bestimmte **spezielle Lösung** zu erhalten, sind weitere  $n$  Zusatzbedingungen nötig.

Bei Differentialgleichungen erster Ordnung stellt man meist eine Anfangsbedingung der Form  $y(t_0) = y_0$ . Man nennt

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

ein **Anfangswertproblem** (AWP) oder **Anfangswertaufgabe** (AWA) für die Dgl.  $y' = f(t, y)$ .

**Beispiel:** Die Differentialgleichung  $y' = t$  besitzt die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Anfangsbedingung  $y(2) = 1$  ergibt sich die spezielle Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1.$$

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Begriffe und Lösbarkeitsfragen

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellt man häufig auch **Randbedingungen**

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1.$$

Die Punkte  $t_0, t_1$ , an denen die Funktionswerte vorgeschrieben werden, sind dabei oft die Randpunkte des Intervalls  $I$ . Man spricht von einem **Randwertproblem** (RWP) oder einer **Randwertaufgabe** (RWA).

Bestimmen Sie die Lösungen des Randwertproblems

$$y'' = t; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

Ergibt sich auch eine eindeutige spezielle Lösung, wenn man statt der Randbedingungen die Anfangsbedingungen  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$  verwendet?

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Begriffe und Lösbarkeitsfragen: Systeme von Differentialgleichungen

Wir werden auch **Systeme von expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen** erster Ordnung betrachten:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\&\vdots = \vdots \\y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}\tag{7.8}$$

Kompakter lässt sich (7.8) schreiben als

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\tag{7.9}$$

mit einer stetigen Funktion  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Warum wir uns auf Systeme erster Ordnung beschränken können, wird auf S. 302 erklärt.

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Begriffe und Lösbarkeitsfragen: Systeme von Differentialgleichungen

Unter einer Lösung von (7.9) über dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  verstehen wir wieder eine stetig differenzierbare Funktion

$$\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die die Differentialgleichung (7.9) für alle  $t \in I$  erfüllt.

Soll es eine eindeutige Lösung geben, muss man jeder der Komponentenfunktionen

$$t \mapsto y_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

einen Anfangswert zuordnen.

Wie im eindimensionalen Fall nennen wir die kombinierte Aufgabenstellung

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{7.10}$$

ein **Anfangswertproblem** (AWP) für die Differentialgleichung (7.9).

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Begriffe und Lösbarkeitsfragen: Reduktion von Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung lässt sich immer auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit  $n$  Komponenten zurückführen. Ist

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

die gegebene Differentialgleichung, so führt man als neue Variablen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

ein, und erhält das zugehörige System gemäß

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= y_3 \\&\vdots \\y_{n-1}' &= y_n \\y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}$$

**Beispiel:** Die Differentialgleichung des Federschwingers

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

lässt sich mit  $x_1 = x$  und  $x_2 = x'$  umschreiben zu

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = -\frac{k}{m}x_1(t),$$

bzw.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Begriffe und Lösbarkeitsfragen: Reduktion von Differentialgleichungen höherer Ordnung

Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + y = \sin t$$

als System erster Ordnung. Kann man dieses System in die Form

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

bringen?

**Bemerkung:** Da man Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung als Systeme erster Ordnung auffassen kann, konzentriert man sich bei der Entwicklung der Lösungstheorie häufig auf Systeme erster Ordnung.

Auch die meisten numerischen Verfahren sind auf diesen Fall zugeschnitten.

## Satz 7.2 (Picard-Lindelöf)

Sei  $f : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablengruppe (d.h. nach  $y_1, \dots, y_n$ ) mit beschränkten partiellen Ableitungen nach diesen Variablen.

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

eine eindeutige Lösung auf  $[t_0, t_0 + a]$ .

Entsprechende Aussagen ergeben sich, wenn man statt  $[t_0, t_0 + a]$  die Intervalle  $[t_0 - a, t_0]$  bzw.  $[t_0 - a, t_0 + a]$  verwendet.

## Illustrierende Beispiele:

- Das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y, \quad y(t_0) = y_0 \quad (\lambda \text{ konstant})$$

hat nach Satz 7.2 eine eindeutige Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$ , denn  $f(t, y) = \lambda y$  ist auf  $\mathbb{R}^2$  stetig, und  $f_y(t, y) = \lambda$  (stetig und) beschränkt.

- Beim Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

greift Satz 7.2 dagegen nicht, denn für  $f(t, y) = \sqrt{y}$  ist  $f_y(t, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$  auf  $(0, a]$  unbeschränkt und für  $y = 0$  nicht definiert.

Zu diesem AWP existieren tatsächlich unendlich viele Lösungen, nämlich

$$y_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq \lambda, \\ \frac{(t-\lambda)^2}{4} & \text{für } t > \lambda, \end{cases} \quad (\lambda \geq 0).$$

### Randbemerkungen:

- Anstelle des „Streifens“  $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$  kann man  $f$  auch auf einem „Quader“

$$Q := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in [t_0, t_0 + a], \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}$$

betrachten. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ergeben sich dann für ein Intervall  $[t_0, t_0 + \bar{a}]$  mit

$$\bar{a} = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M := \max_{(t, \mathbf{y}) \in Q} \|f(t, \mathbf{y})\|.$$

- Statt beschränkter partieller Ableitungen nach  $\mathbf{y}$  genügt bereits das Erfülltsein einer **Lipschitz-Bedingung** bezüglich  $\mathbf{y}$ , das bedeutet

$$\|f(t, \mathbf{y}_2) - f(t, \mathbf{y}_1)\| \leq L \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|.$$

mit einer gewissen Konstante  $L > 0$ .

- Aufgrund der Betrachtungen von S. 302 kann man mit Satz 7.2 auch Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung behandeln.

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

### 7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt untersuchen wir Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(t, y), \quad t \in I, \quad (7.11)$$

bzw. die zugehörigen Anfangswertprobleme

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (7.12)$$

stets unter der Annahme, dass die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind.

Ziel ist die Ermittlung der eindeutigen Lösung von (7.12) bzw. der allgemeinen Lösung von (7.11).

Die Veranschaulichung der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

erfolgt oft über das zugehörige **Richtungsfeld**.

An jeden Punkt  $(t_0, y_0)$  der  $t$ - $y$ -Ebene wird dabei ein Pfeil mit Anstieg  $f(t_0, y_0)$  angeheftet.

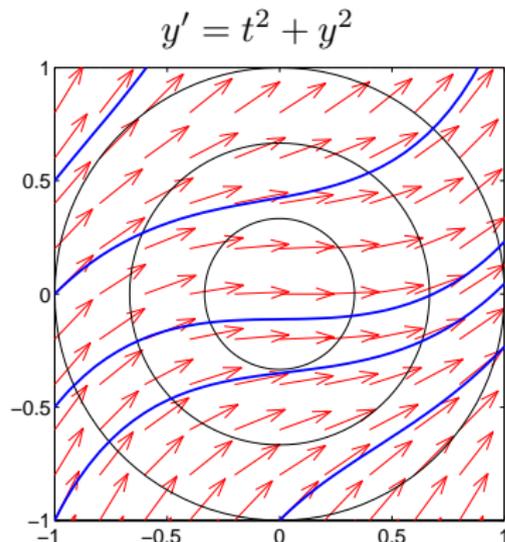
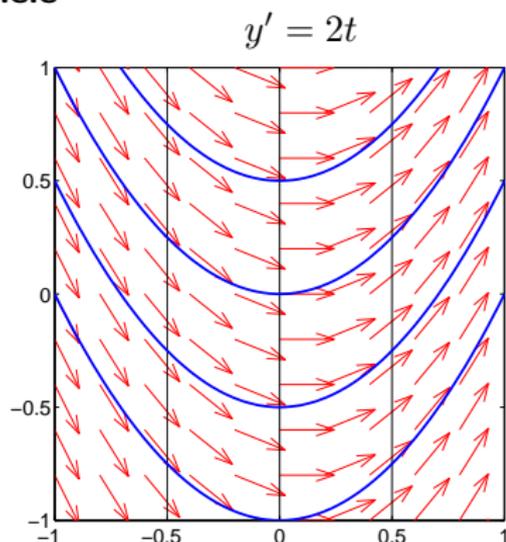
Jede Lösung der Differentialgleichung muss in jedem Punkt  $(t^*, y(t^*))$  ihres Funktionsgraphen dem Richtungsfeld „folgen“, d.h. als Tangente in  $t^*$  gerade den zugehörigen Pfeil des Richtungsfelds besitzen – denn es gilt

$$y'(t^*) = f(t^*, y(t^*)).$$

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Differentialgleichungen erster Ordnung: Richtungsfeld und Isoklinen

### Beispiele



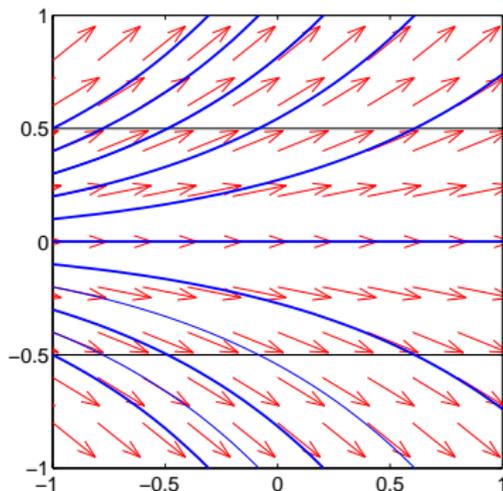
Richtungsfelder (rot) und einige spezielle Lösungen (blau).

Die schwarzen Kurven der Form  $f(t, y) = c$  heißen **Isoklinen**. Alle an einer Isoklinen beginnenden Pfeile zeigen in die gleiche Richtung.

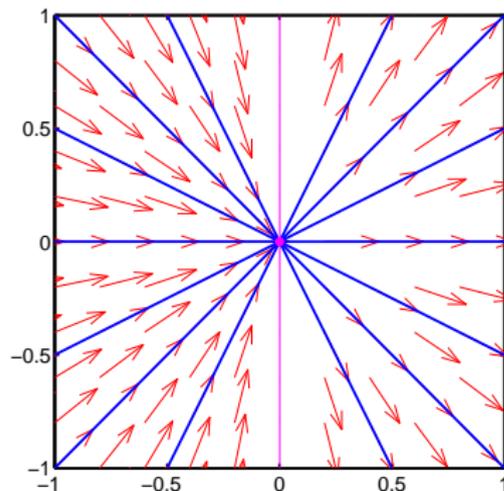
# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Differentialgleichungen erster Ordnung: Richtungsfeld und Isoklinen

$$y' = y$$



$$y' = \frac{y}{t} \quad (t \neq 0)$$



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Differentialgleichungen erster Ordnung: Euler-Verfahren

Das **Euler-Verfahren** (auch **Polygonzugverfahren**) ist der Prototyp eines numerischen Verfahrens zur Lösung von AWP der Form

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y) \quad \text{für } t \in I, \\y(t_0) &= y_0.\end{aligned}$$

Wir geben uns dabei damit zufrieden, Näherungen  $y_n \approx y(t_n)$  an die Lösung zu **diskreten Zeitpunkten**  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  zu bestimmen.

Die Grundidee ist recht einfach:

- 1 Approximiere die Lösung im Intervall  $[t_0, t_1]$  durch eine lineare Funktion, welche durch die vorgeschriebenen Anfangswerte  $(t_0, y_0)$  geht und die Steigung  $f(t_0, y_0)$  besitzt.
- 2 Ist  $y_1$  der Wert dieser linearen Funktion an der Stelle  $t_1$  (im Allgemeinen ist  $y_1 \neq y(t_1)$ , aber dennoch eine gute Näherung), so ist die Näherungslösung im Intervall  $[t_1, t_2]$  die lineare Funktion durch  $(t_1, y_1)$  mit Steigung  $f(t_1, y_1)$ .
- 3 So fährt man fort bis zum letzten Teilintervall  $[t_{N-1}, t_N]$ .

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Differentialgleichungen erster Ordnung: Euler-Verfahren

Wir fassen diese Idee zur Lösung des AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

in folgendem Algorithmus:

### Euler-Verfahren

Wähle eine Schrittweite  $h > 0$  und definiere

$$t_n := t_0 + nh, \quad n = 1, \dots, N.$$

Für  $n = 0, \dots, N - 1$  berechne

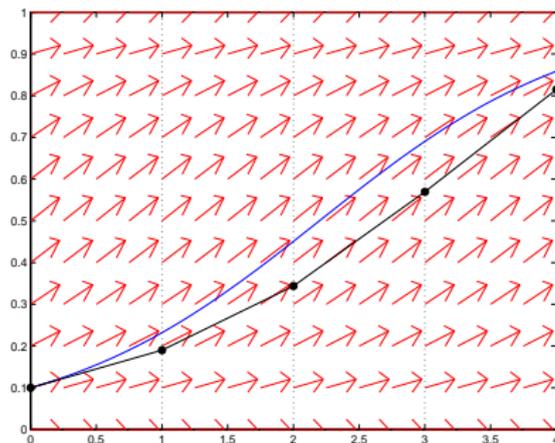
$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Selbstverständlich ist dieses Verfahren sehr grob und erfordert z.T. sehr kleine Schrittweiten  $h$  für hohe Genauigkeit. Allerdings ist es einfach zu programmieren und liefert häufig zumindest eine grobe Näherung.

**Beispiel:** Wir lösen ein AWP zur **logistischen Gleichung**

$$y' = y(1 - y), \quad y(0) = 0.1,$$

mit dem Euler-Verfahren mit (sehr grober) Schrittweite  $h = 1$ .



Offenbar ist die gewonnene Näherung (schwarz) an die exakte Lösung (blau) noch sehr grob. Für eine brauchbare Approximation müsste man  $h$  deutlich kleiner wählen.

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

**7.4 Trennung der Veränderlichen**

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

# Trennung der Veränderlichen

Wir behandeln nun Methoden zur analytischen Bestimmung der Lösung von Differentialgleichungen/AWP.

Diese wurden zumeist für bestimmte Typen von Differentialgleichungen entwickelt. Einer der wichtigsten Typen ist gegeben durch:

## Definition 7.3

Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = f(t)g(y)$$

heißt **separabel** oder Differentialgleichung mit **trennbaren Veränderlichen**.

Häufig lassen sich separable Differentialgleichungen mittels Trennung der Veränderlichen (T. d. V.) lösen.

# Trennung der Veränderlichen

## Beispiele

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind separabel? Geben Sie gegebenenfalls die Funktionen  $f(t)$  und  $g(y)$  an.

- $y' = y + 1$ ,
- $y' = ty + y$ ,
- $y' = t^2 \sin y$ ,
- $y' = ty + y^2$ ,
- $y' = \frac{t}{y}$ ,
- $y' = \lambda y$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$  fest).

### Satz 7.4

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t)g(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (7.13)$$

wobei  $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$  Intervalle sowie  $t_0 \in I_1$  und  $y_0 \in I_2$ . Dann gelten:

- (1) Ist  $g(y) \neq 0$  ( $y \in I_2$ ), so gibt es eine eindeutige Lösung von (7.13) auf einem offenen Intervall  $J \subset I_1$ . Diese kann man aus

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(\tilde{y})} d\tilde{y} = \int_{t_0}^t f(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (7.14)$$

durch Auflösen nach  $y$  berechnen.

- (2) Ist  $g(y_0) = 0$ , so ist die konstante Funktion  $y(t) = y_0$  eine Lösung von (7.13) auf  $I_1$ .

# Trennung der Veränderlichen

## Lösungsmethode

Wir fassen das Vorgehen bei der Lösung des AWP

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = f(t) g(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

in folgendem Schema zusammen:

## Vorgehen bei der Trennung der Veränderlichen

- Trenne die Variablen gemäß

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t) dt.$$

- Integriere auf beiden Seiten:

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(\tilde{y})} d\tilde{y} = \int_{t_0}^t f(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

(unbestimmte Integration zur Ermittlung der allgemeinen Lösung – Vorsicht bei der Wahl der Integrationskonstanten, siehe später).

- Löse nach  $y$  auf.

# Trennung der Veränderlichen

## Beispiel

Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = ty, \quad y(0) = 1$$

führt Trennung der Veränderlichen auf

$$\int_1^y \frac{1}{\tilde{y}} d\tilde{y} = \int_0^t \tilde{t} d\tilde{t}$$

Nach Integration ergibt sich

$$\ln y = \frac{1}{2}t^2$$

und nach Auflösung nach  $y$  schließlich

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

# Trennung der Veränderlichen

## Beispiel

Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0.$$

mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  fest.

**Anmerkung:** Mit diesem Problem lässt sich zum Beispiel das Wachstum einer Population (Malthusianisches Gesetz, vgl. S. 290) erfassen ( $\lambda > 0$ ).

Eine weitere Anwendung ist die Gleichung für den radioaktiven Zerfall eines Stoffes ( $\lambda < 0$ ).

# Trennung der Veränderlichen

## Bestimmung der allgemeinen Lösung

Das Verfahren von S. 320 kann auch zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t) g(y)$$

benutzt werden. Dafür muss man im zweiten Schritt unbestimmt integrieren:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt.$$

Dabei entsteht nach Zusammenfassung beider Integrationskonstanten eine Gleichung vom Typ

$$G(y) = F(t) + c, \tag{7.15}$$

die man wieder nach  $y$  aufzulösen versucht.  $F$  und  $G$  sind dabei Stammfunktionen von  $f$  bzw.  $\frac{1}{g}$ .

# Trennung der Veränderlichen

## Anmerkungen

- Bei der Wahl der Integrationskonstanten  $c$  in (7.15) ist Vorsicht geboten. Zu jedem zulässigen  $c$  gibt es eine zugehörige Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$ , welche beim Integrieren auf

$$F(t) - F(t_0) = G(y) - G(y_0) \quad \text{bzw.} \quad c = G(y_0) - F(t_0)$$

führt. Sind  $F$  und  $G$  beispielsweise beschränkt, kann  $c$  nicht jeden Wert in  $\mathbb{R}$  annehmen!

- Bei der Bestimmung der allgemeinen Lösung sind die Fälle mit  $g(y) = 0$  natürlich wieder separat zu betrachten.

# Trennung der Veränderlichen

## Beispiel

Wir suchen sämtliche Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{y}, \quad y \neq 0.$$

in einer Umgebung von  $t_0 = 0$ . Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int y \, dy = \int t \, dt,$$

und somit

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + c_1.$$

Da  $t_0 = 0$  im Lösungsintervall liegen soll, kommen nur Konstanten  $c_1 > 0$  infrage ( $c_1 = 0$  entfällt, da  $y(0) \neq 0$  sein muss).

Für die Angabe der Lösung stellt man nach  $y$  um und redefiniert die Konstante ( $c := \frac{1}{2}c_1$ ):

$$y(t) = \pm \sqrt{t^2 + c}, \quad c > 0.$$

# Trennung der Veränderlichen

## Beispiel

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t).$$

Achten Sie in jedem Schritt genau darauf, welche Werte die auftretende Konstante annehmen kann.

Vergessen Sie auch nicht, den Fall  $y = 0$  zu behandeln.

# Trennung der Veränderlichen

Beispiel: Durch Transformation lösbare Differentialgleichungen

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(at + by + c) \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

kann durch die Substitution

$$z = at + by + c$$

in eine separable Differentialgleichung überführt werden. Es gilt nämlich

$$z'(t) = a + by'(t) = a + bf(at + by + c) = a + bf(z),$$

was eine separable Differentialgleichung in  $z$  und  $t$  darstellt.

Lösen Sie auf diese Weise die Differentialgleichung  $y' = (t + y)^2$ .

# Trennung der Veränderlichen

Beispiel: Ähnlichkeits-Differentialgleichung

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (t \neq 0)$$

heißt **Ähnlichkeits-Differentialgleichung** und kann durch die Substitution

$$z = \frac{y}{t}$$

in eine separable Differentialgleichung überführt werden. Es gilt nämlich  $y = tz$  d. h.

$$y' = tz' + z = f(z).$$

Nach  $z'$  umgestellt heißt das

$$z'(t) = \frac{f(z) - z}{t}.$$

Lösen Sie auf diese Weise die Differentialgleichung  $y' = \frac{t+2y}{t}$ .

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

**7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung**

7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

## Definition 7.5

Für gegebene stetige Funktionen  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, heißt

$$y' + f(t)y = g(t) \quad (7.16)$$

lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

$f$  heißt **Koeffizientenfunktion** und  $g$  heißt **Störterm**, **Quellterm** oder **Inhomogenität**.

Die Differentialgleichung (7.16) heißt **homogen**, wenn  $g(t) = 0$ , andernfalls **inhomogen**.

Die Bezeichnung „linear“ bezieht sich dabei auf die  $y$ -Variable, d.h.  $f(t)$  und  $g(t)$  können durchaus nichtlineare Funktionen sein.

# Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

## Struktur der Lösungen

Für die **homogene** lineare Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = 0$$

beobachten wir folgendes:

- Die Funktion  $y \equiv 0$  ist eine Lösung.
- Sind  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen, so ist auch  $y_1 + y_2$  eine Lösung.  
(„**Superpositionsprinzip**“)
- Ist  $y$  eine Lösung, dann ist auch  $\lambda y$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine Lösung.

Welche algebraische Struktur ergibt sich damit für die Menge aller Lösungen der homogenen Gleichung?

### Satz 7.6

Die Lösungsmenge  $Y_h$  der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' + f(t)y = 0 \quad (7.17)$$

bildet einen Vektorraum. Ist  $y_s$  eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = g(t), \quad (7.18)$$

dann hat die Lösungsmenge  $Y$  dieser inhomogenen Gleichung die Form

$$Y = y_s + Y_h.$$

Die allgemeine Lösung von (7.18) ist also gegeben durch

$$y = y_h + y_s \quad (7.19)$$

mit einer speziellen Lösung  $y_s$  von (7.18) und der allgemeinen Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

# Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

## Struktur der Lösungen

Verifizieren Sie Formel (7.19). Zeigen Sie dazu:

- Ist  $y_1$  Lösung von (7.17), so ist  $y_1 + y_s$  Lösung von (7.18).
- Ist  $y$  Lösung von (7.18), so ist  $y - y_s$  Lösung von (7.17).

**Bestimmung der Lösungen:** Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = 0 \quad \text{bzw.} \quad y' = -f(t)y$$

kann mittels Trennung der Veränderlichen erfolgen. Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , so ergibt sich als allgemeine Lösung

$$y_h(t) = ce^{-F(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Führen Sie diese Berechnung im Detail aus.

# Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

## Variation der Konstanten

Wir benötigen nun noch eine spezielle Lösung  $y_s$  der inhomogenen Gleichung. Diese kann man mittels **Variation der Konstanten** erhalten, d.h. mit einem Ansatz der Form

$$y_s(t) = c(t) e^{-F(t)}.$$

Für die Ableitung gilt zunächst

$$y_s'(t) = [c'(t) - c(t)F'(t)] e^{-F(t)} = [c'(t) - c(t)f(t)] e^{-F(t)}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (7.18) liefert somit

$$\begin{aligned} y_s'(t) + f(t) y_s(t) &= [c'(t) - c(t)f(t) + f(t)c(t)] e^{-F(t)} \\ &= c'(t) e^{-F(t)} \stackrel{!}{=} g(t). \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} c'(t) &= g(t) e^{F(t)}, \\ \text{bzw. } c(t) &= \int g(t) e^{F(t)} dt. \end{aligned}$$

### Satz 7.7

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' + f(t)y = g(t). \quad (7.20)$$

Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , so ist die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung  $y' + f(t)y = 0$  gegeben durch

$$y_h(t) = c e^{-F(t)}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (7.21)$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (7.20) ist gegeben durch

$$y_s(t) = e^{-F(t)} \int g(t) e^{F(t)} dt, \quad (7.22)$$

wobei die Integrationskonstante weggelassen werden kann. Die allgemeine Lösung von (7.20) ist somit

$$y(t) = e^{-F(t)} \left( c + \int g(t) e^{F(t)} dt \right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

# Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

## Variation der Konstanten: Beispiel

Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + 2ty = t, \quad y(0) = 1.$$

Im Kontext von Satz 7.7 setzen wir  $f(t) = 2t$  bzw.  $F(t) = t^2$  sowie  $g(t) = t$ . Nach (7.21) ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = c e^{-t^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich nach (7.22) gemäß

$$y_s(t) = e^{-t^2} \int t e^{t^2} dt = e^{-t^2} \cdot \frac{1}{2} e^{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Natürlich hätten Sie statt (7.21) und (7.22) zu benutzen auch die Schritte von S.333f. erneut ausführen können.

# Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

## Variation der Konstanten: Beispiel

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t) = c e^{-t^2} + \frac{1}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösung des AWP ergibt sich

$$y(0) = c + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1,$$

d.h.  $c = \frac{1}{2}$  bzw.

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-t^2}).$$

Für die Stromstärke  $I$  in einem Stromkreis mit Selbstinduktion und Spannungsverlauf  $U = U(t)$  gilt die Beziehung

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (L, R > 0 \text{ fest}).$$

Ermitteln Sie den Verlauf der Stromstärke  $I(t)$ , falls  $I(0) = I_0$ . Was ergibt sich im Gleichstromkreis ( $U(t) = \text{const.}$ ) für  $t \rightarrow \infty$ ?

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

**7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

# Lineare Dgln. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von (7.16), bei dem die Koeffizientenfunktion  $f(t)$  konstant ist:

$$y' + \lambda y = g(t). \quad (7.23)$$

Als Lösung des zugehörigen homogenen Systems hatten wir auf S. 326 bereits

$$y_h = c e^{-\lambda t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

identifiziert. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann man wieder mittels Variation der Konstanten finden – dies funktioniert immer.

Hat der Störterm  $g(t)$  in (7.23) jedoch eine spezielle Struktur, so ist man häufig mit einem passenden Ansatz schneller.

# Lineare Dgln. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Tabelle für Ansätze

$g$	Ansatz für $y_s$
Polynom vom Grad $n$	$K_0 + K_1 t + \dots + K_n t^n$
$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$	$K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$ oder $K \sin(\omega t + \kappa)$
$Ae^{at}$	$K e^{at}$ , falls $a \neq -A$ , $K t e^{at}$ , falls $a = -A$ .

Die Ansätze werden also strukturell an den Störterm  $g(t)$  angepasst.  
Die Konstanten  $K, K_0, K_1, \dots$  bestimmt man jeweils durch Einsetzen in die Differentialgleichung (7.23).

Man bestimme auf diese Weise die Lösung der Differentialgleichung  $y' + 5y = -26 \sin t$ .

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten im Folgenden Systeme der Form

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t). \quad (7.24)$$

mit einer festen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Mit (7.23) haben wir schon einen Spezialfall kennengelernt.

Ein weiteres einfaches Beispiel ist durch

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -42 & 0 \\ 0 & -23 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} y_1' &= -42 y_1 \\ y_2' &= -23 y_2 \end{aligned}$$

gegeben. Dieses System ist entkoppelt und besitzt die Lösung

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-42t} \\ c_2 e^{-23t} \end{bmatrix} = c_1 e^{-42t} \mathbf{e}_1 + c_2 e^{-23t} \mathbf{e}_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ganz analog zu Satz 7.6 gilt:

### Satz 7.8

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem  $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t)$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt:

- Die Lösungsmenge  $Y_h$  des homogenen Systems  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ , bildet einen Vektorraum der Dimension  $n$ .
- Ist  $\mathbf{y}_s$  eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems und  $\mathbf{y}_h$  die allgemeine Lösung des homogenen Systems, so ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_h.$$

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

## Fundamentallösungen

Da die Lösungsmenge des homogenen Systems

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad (7.25)$$

ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum ist, lässt sich eine **Basis** (auch **Fundamentalsystem**), bestehend aus  $n$  Lösungen dieses Systems, finden.

Die Elemente

$$\mathbf{y}_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

einer solchen Basis heißen **Fundamentallösungen**.

Jede Lösung von (7.25) lässt sich eindeutig in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{y}_2(t) + \dots + \alpha_n \mathbf{y}_n(t)$$

mit reellen Koeffizienten  $\alpha_i$  darstellen.

Geben Sie ein vermutliches Fundamentalsystem zum Beispiel von S. 342 an.

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

## Wronski-Test

Wie erkennt man aber, ob ein Funktionensystem  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  aus Lösungen von (7.25) linear unabhängig ist? Dabei hilft die **Wronski-Determinante**<sup>3</sup>

$$W(t) := \det([\mathbf{y}_1(t) \ \mathbf{y}_2(t) \ \dots \ \mathbf{y}_n(t)]).$$

### Satz 7.9

Seien  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  Lösungen von  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ . Dann gilt:

- $W(t) \neq 0$  oder  $W(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .
- Die Lösungen  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  bilden ein Fundamentalsystem, genau dann wenn  $W(t) \neq 0$  für ein (und damit für alle)  $t \in \mathbb{R}$  ist.

Überprüfen Sie Ihre Vermutung zum Beispiel von S. 342.

<sup>3</sup>Josef Hoëné-Wronski (1776–1853), polnischer Mathematiker

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

## Bestimmung der Lösung

Wir wollen nun ein Fundamentalsystem von  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  bestimmen.  
Sehr einfach ist die Aufgabe für eine Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Wie im Beispiel auf S. 342 ist das System dann entkoppelt:

$$y'_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ein Fundamentalsystem ist somit

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{e}_1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{e}_2, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{e}_n. \quad (7.26)$$

Wir werden versuchen, den allgemeinen Fall – sofern möglich – auf eine solche Diagonalform zurückzuführen.

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

## Bestimmung der Lösung

Für eine beliebige Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  versuchen wir, motiviert durch (7.26), den Ansatz

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}.$$

Einsetzen in  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  liefert

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = A e^{\lambda t} \mathbf{v},$$

und somit

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Also muss  $\lambda$  Eigenwert von  $A$ , und  $\mathbf{v}$  ein zugehöriger Eigenvektor sein.

Existiert eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ , haben wir auf diese Weise ein Fundamentalsystem gefunden.

### Satz 7.10

Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zum Eigenvektor  $v$ , dann ist durch

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (7.27)$$

eine Lösung des Systems  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  gegeben.

Lösungen der Form (7.27), die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind linear unabhängig.

Ist  $A$  diagonalisierbar, so existiert ein Fundamentalsystem aus Lösungen der Form (7.27).

**Erinnerung:**  $A$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten übereinstimmen.

Dies gilt insbesondere, wenn alle Eigenwerte verschieden sind.

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

## Bestimmung der Lösung

**Anmerkung:** Komplexe Eigenwerte treten immer in konjugiert-komplexen Paaren auf. Daher kann man unter Verwendung von Sinus und Kosinus auch reelle Fundamentallösungen erzeugen (Diskussion in anderem Kontext später).

Man bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

## Exkurs: Hauptvektorlösungen

Der nicht-diagonalisierbare Fall gestaltet sich etwas schwieriger. Hier reichen die linear unabhängigen Eigenvektoren nicht aus, um eine Basis des ganzen Raumes zu bilden. Man vervollständigt daher die Lösungsbasis mit Hilfe von Hauptvektoren, einer Verallgemeinerung von Eigenvektoren.

Wir nennen einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  **Hauptvektor**  $k$ -ter Stufe zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn

$$(A - \lambda I)^k v = \mathbf{0}, \quad \text{aber} \quad (A - \lambda I)^{k-1} v \neq \mathbf{0}$$

gilt.

Ein Eigenvektor ist offenbar ein Hauptvektor erster Stufe (beachte  $(A - \lambda I)^0 = I$ ).

Zu einem Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit  $k$  lassen sich stets  $k$  linear unabhängige Hauptvektoren finden, und Hauptvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

# Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten

## Exkurs: Hauptvektorlösungen

Wir illustrieren die Berechnung von Hauptvektoren zum Eigenwert  $\lambda$  am Fall  $k = 2$ .  
Es gilt

$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{v} = (A - \lambda I) \underbrace{(A - \lambda I) \mathbf{v}}_{=: \mathbf{w} \neq \mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

Daher erhält man  $\mathbf{v}$  aus dem Eigenvektor  $\mathbf{w}$  durch Lösen der Gleichung

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

besitzt den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

Bestimmen Sie einen Hauptvektor, und überzeugen Sie sich, dass dieser den Eigenvektor zu einer Basis ergänzt.

### Satz 7.11

Sie  $\lambda$  eine  $k$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $A$  (also ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit  $k$ ), und  $\mathbf{v}$  eine Lösung von

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (7.28)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \mathbf{v} \\ &= e^{\lambda t} \left( \mathbf{v} + t(A - \lambda I)\mathbf{v} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda I)^{k-1} \mathbf{v} \right) \end{aligned}$$

eine Lösung von  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ .

Es gibt immer  $k$  linear unabhängige Lösungen von (7.28), und diese führen zu linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung.

Man ermittle ein Fundamentalsystem für

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

(vgl. Bsp. S. 351).

### Anmerkungen:

- Von den Hauptvekturlösungen sollten Sie vor allem mitnehmen, dass im Fall  $\nu_{\text{alg}}(\lambda) = k$  und  $\nu_{\text{geom}}(\lambda) = 1$  Terme der Form

$$e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad t e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad t^2 e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad \dots, \quad t^{k-1} e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

auftreten können.

- Will man statt der homogenen Gleichung  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  das System  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$  lösen, so erhält man eine spezielle Lösung wieder mittels Variation der (d. h. aller) Konstanten.

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Theoretische Behandlung

Eine **lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$y'' + ay' + by = g(t) \quad (a, b \in \mathbb{R}). \quad (7.29)$$

Man nennt (7.29) **homogen**, falls  $g = 0$ , und andernfalls **inhomogen**.

Setzt man  $y_1 = y$  und  $y_2 = y'$ , so ist (7.29) äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

also zu einem System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Theoretische Behandlung

Die Äquivalenz zu (7.30) wird zwar kaum zum Rechnen benutzt, liefert uns aber wichtige Informationen über die Struktur der Lösung von (7.29):

### Satz 7.12

Die Lösungsmenge  $Y_h$  der homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (7.31)$$

ist ein zweidimensionaler Vektorraum.

Zwei Lösungen  $y_h, z_h$  von (7.31) bilden genau dann eine Basis von  $Y_h$ , wenn ihre **Wronski-Determinante**

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} y_h(t) & z_h(t) \\ y_h'(t) & z_h'(t) \end{bmatrix}$$

an mindestens einer Stelle  $t \in \mathbb{R}$  von Null verschieden ist.

Die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung (7.29) ist  $y_s + Y_h$ , wobei  $y_s$  eine beliebige spezielle Lösung von (7.29) ist.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Lösungsstrategie

Zur Lösung der Differentialgleichung (7.29) geht man daher wie folgt vor:

- (1) Bestimme zwei linear unabhängige Lösungen  $y_h, z_h$  der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Wie das geht, steht auf S. 358 f. und ist in Satz 7.13 zusammengefasst.

- (2) Bestimme eine (beliebige) spezielle Lösung  $y_s$  der inhomogenen Gleichung (7.29). Siehe dazu S. 363 ff.
- (3) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (7.29) ergibt sich dann gemäß

$$y(t) = c_1 y_h(t) + c_2 z_h(t) + y_s(t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Lösung der homogenen Gleichung

Bei der Lösung der homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

spielen die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms**

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

eine Schlüsselrolle. Bei diesen handelt es sich gerade um die Eigenwerte der Matrix  $A$  aus (7.30). Wir können also die Ergebnisse aus Abschnitt 7 direkt übertragen.

Verifizieren Sie, dass  $p(\lambda)$  das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  im Sinne der Eigenwerttheorie ist, d. h. dass  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  gilt.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es können zwei Fälle auftreten:

- Die Gleichung  $p(\lambda) = 0$  hat **zwei verschiedene Lösungen**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  
d.h.  $A$  hat zwei verschiedene Eigenwerte.

Dann sind

$$y_h(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad z_h(t) = e^{\lambda_2 t}$$

(möglicherweise komplexe) Basislösungen.

- Die Gleichung  $p(\lambda) = 0$  hat **genau eine Lösung**  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ .  
Dann ist  $\lambda_1$  Eigenwert von  $A$  mit algebraischer Vielfachheit 2  
und geometrischer Vielfachheit 1 (leicht zu zeigen).

Wir sind daher in der Hauptvektor-Situation von S. 352,  
und erhalten als Basislösungen

$$y_h(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad z_h(t) = t e^{\lambda_1 t}.$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Konjugiert-komplexe Nullstellen

Unangenehm bleibt noch der Fall, dass  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  **verschieden, aber komplex** sind. In diesem Fall sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  zueinander konjugiert komplex, d. h. von der Form

$$\lambda_1 = \mu + i\omega, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \mu - i\omega \quad (\mu, \omega \in \mathbb{R}).$$

Wegen

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} &= c_1 e^{(\mu+i\omega)t} + c_2 e^{(\mu-i\omega)t} \\ &= c_1 e^{\mu t} e^{i\omega t} + c_2 e^{\mu t} e^{-i\omega t} \\ &= c_1 e^{\mu t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) + c_2 e^{\mu t} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= (c_1 + c_2) e^{\mu t} \cos(\omega t) + i(c_1 - c_2) e^{\mu t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

für  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ , kann man statt  $e^{\lambda_1 t}$  und  $e^{\lambda_2 t}$  aber auch

$$y_h(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad z_h = e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

als reelle Lösungsbasis verwenden.

### Satz 7.13

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Sei  $D := \frac{a^2}{4} - b$ .

Dann sind zwei linear unabhängige Lösungen  $y_h$  und  $z_h$  gegeben durch

$$y_h = e^{\lambda_1 t}, z_h = e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{D} \quad \text{falls } D > 0,$$

$$y_h = e^{\lambda t}, z_h = t e^{\lambda t}, \quad \lambda = -\frac{a}{2} \quad \text{falls } D = 0,$$

$$y_h = e^{\mu t} \cos \omega t, z_h = e^{\mu t} \sin \omega t, \quad \mu = -\frac{a}{2}, \omega = \sqrt{-D}, \quad \text{falls } D < 0.$$

Man bestimme die Lösungen der Differentialgleichungen

- $y'' + 4y' - 5y = 0,$
- $y'' - 2y' + y = 0,$
- $y'' + 4y = 0,$
- $y'' - 4y' + 5y = 0,$
- $y'' - y' = 0,$
- $y'' = 0.$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung

Für die Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

kann man grundsätzlich eine Variation der Konstanten für das äquivalente System (7.30) durchführen. Einfacher ist meist das **Grundlösungsverfahren**:

### Satz 7.14

Sei  $g$  stetig auf dem Intervall  $I$  und sei  $t_0 \in I$ . Außerdem sei  $z_h$  die Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y'' + ay' + by = 0$ , die die Anfangsbedingungen  $y(t_0) = 0$  und  $y'(t_0) = 1$  erfüllt. Dann ist

$$y_s(t) = \int_{t_0}^t z_h(t + t_0 - u) g(u) \, du$$

eine Lösung von  $y'' + ay' + by = g(t)$  auf  $I$ .

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung

### Beispiel:

Gesucht ist die Lösung von  $y'' + y = t$ .

Das zugehörige homogene Problem besitzt die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \quad (7.32)$$

$g(t) = t$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, so dass wir zum Beispiel  $t_0 = 0$  wählen können.

Fordert man für die homogene Lösung zusätzlich  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$ , so erhält man aus (7.32)

$$z_h(t) = \sin t.$$

Mit Satz 7.14 erhält man nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_s(t) = \int_0^t \sin(t-u) u \, du = t - \sin t.$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung

Für die allgemeine Lösung von  $y'' + y = t$  ergibt sich somit

$$\begin{aligned}y(t) &= y_h(t) + y_s(t) \\ &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + t - \sin t \\ &= c_1 \cos t + c_3 \sin t + t \quad (c_1, c_3 \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Bestimmen Sie auf diese Weise die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y = \frac{1}{\sin t}, \quad t \in (0, \pi).$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung

Hat der Störterm  $g(t)$  in

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

eine spezielle Struktur, ist es oft wieder einfacher, eine spezielle Lösung  $y_s$  durch einen Ansatz in Form des Störterms zu bestimmen.

Die im Ansatz auftretenden Konstanten sind durch Einsetzen in die Differentialgleichung zu ermitteln.

### Oft verwendete Ansätze:

- $g(t)$  ist ein Polynom vom Grad  $n$ . Ansatz:

$$y_s(t) = \begin{cases} q(t), & \text{falls } b \neq 0, \\ tq(t), & \text{falls } b = 0 \text{ und } a \neq 0, \\ t^2q(t), & \text{falls } b = a = 0, \end{cases}$$

dabei ist  $q$  ein Polynom vom Grad  $n$ .

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung

- $g(t) = e^{\kappa t} p(t)$  mit einem Polynom  $p$  vom Grad  $n$ . Ansatz:

$$y_s(t) = \begin{cases} e^{\kappa t} q(t), & \text{falls } c(\kappa) \neq 0, \\ e^{\kappa t} t q(t), & \text{falls } c(\kappa) = 0 \text{ und } c'(\kappa) \neq 0, \\ e^{\kappa t} t^2 q(t), & \text{falls } c(\kappa) = c'(\kappa) = 0, \end{cases}$$

dabei ist  $q$  ein Polynom vom Grad  $n$  und  $c(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$  bezeichnet das charakteristische Polynom der (homogenen) Differentialgleichung.

- $g(t) = e^{\kappa t} [p_1(t) \cos(\omega t) + p_2(t) \sin(\omega t)]$  mit Polynomen  $p_1, p_2$  mit höchstem auftretenden Grad  $n$ . Ansatz:

$$y_s(t) = \begin{cases} e^{\kappa t} [q_1(t) \cos(\omega t) + q_2(t) \sin(\omega t)], & \text{falls } c(\kappa + i\omega) \neq 0, \\ t e^{\kappa t} [q_1(t) \cos(\omega t) + q_2(t) \sin(\omega t)], & \text{falls } c(\kappa + i\omega) = 0, \end{cases}$$

dabei sind  $q_1$  und  $q_2$  Polynome vom Grad  $n$ .

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung

Ermitteln Sie auf diese Weise die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 2t^2.$$

Formulieren Sie für die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = g(t)$$

passende Ansätze zu folgenden Störtermen:

- $g(t) = \sin t$ ,
- $g(t) = 3t e^t$ ,
- $g(t) = e^t (2t \sin(4t) + \cos(4t))$ .

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

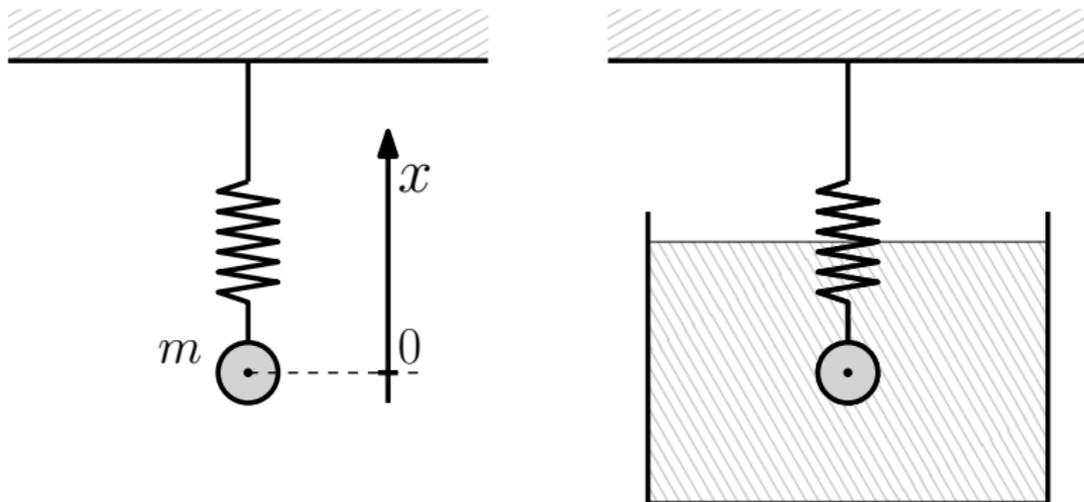
7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten noch einmal den Federschwinger von S. 285 f. (links).  
Zusätzlich betrachten wir dieselbe Anordnung mit Flüssigkeitsdämpfung (rechts).



In der Flüssigkeit wirkt eine Reibungskraft der Bewegung entgegen.  
Diese ist proportional zur Geschwindigkeit (Stokes-Reibung), d.h.  $F_R = -\beta x'$ .

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es gilt wieder das Newtonsche Bewegungsgesetz ( $F = mx''$ ), wobei als Kräfte nun Feder- und Reibungskraft zu berücksichtigen sind:

$$mx'' = -kx - \beta x'.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Standarddarstellung

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0 \quad (\beta, k > 0). \quad (7.33)$$

Wir analysieren das Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von den Parametern  $\beta$  und  $k$ .

Dabei wollen wir speziell auf die zu den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0 \quad (7.34)$$

gehörende Lösung eingehen.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

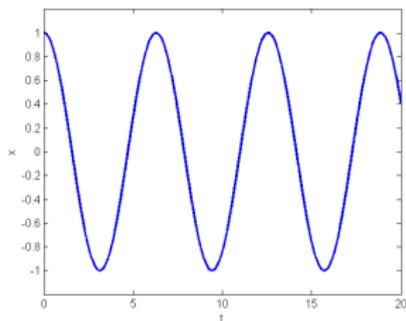
Ungedämpfte Schwingung ( $\beta = 0$ )

Das entspricht dem auf S. 285 f. diskutierten Fall. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind hier  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ , so dass sich als Lösung von (7.33)

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

ergibt. Zu den Anfangsbedingungen (7.34) erhält man die spezielle Lösung

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$



$$k = m = 1, \beta = 0 \\ x_0 = 1$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schwache Dämpfung ( $\beta^2 < 4km$ )

In diesem Fall besitzt das charakteristische Polynom von (7.33) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \frac{i}{2m} \sqrt{4km - \beta^2},$$

so dass sich als allgemeine Lösung (vgl. S. 360)

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left( c_1 \sin \left( \frac{\sqrt{4km - \beta^2}}{2m} t \right) + c_2 \cos \left( \frac{\sqrt{4km - \beta^2}}{2m} t \right) \right)$$

ergibt.

Mit den Anfangsbedingungen (7.34) bestimmt man die Konstanten  $c_1, c_2$  zu

$$c_1 = \frac{\beta x_0}{\sqrt{4km - \beta^2}} \quad \text{und} \quad c_2 = x_0.$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schwache Dämpfung ( $\beta^2 < 4km$ )

Analysiert man die Lösung zu den Anfangsbedingungen (7.34), so stellt man fest:

- Je größer die Dämpfung ist, desto schneller klingt die Lösung ab.
- Die Periodendauer der periodischen Anteile (sin und cos-Terme) wird mit zunehmender Dämpfung größer, nämlich

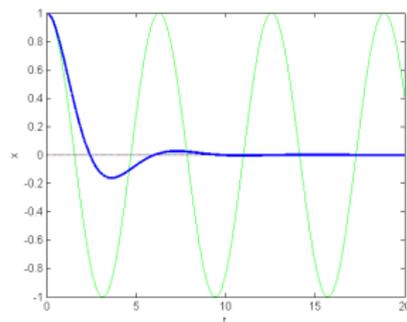
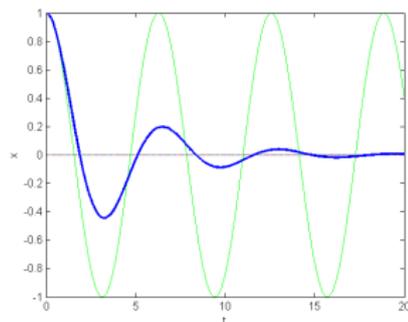
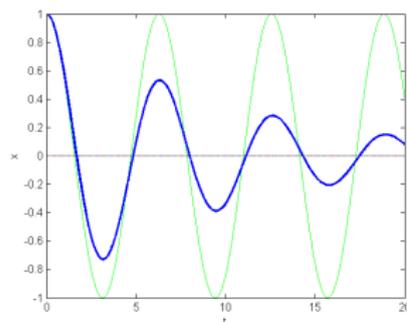
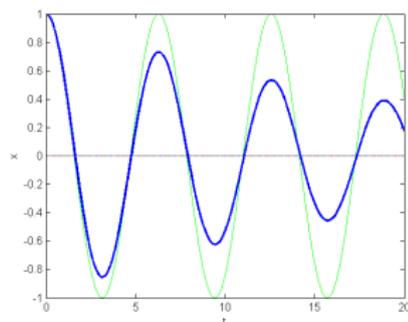
$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km - \beta^2}}$$

(Für den Fall ohne Dämpfung, d. h. für  $\beta = 0$ , wäre  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .)

- Da  $c_1 \neq 0$  ist, sind die periodischen Terme der gedämpften Schwingung im Vergleich zur ungedämpften Schwingung einer Phasenverschiebung unterworfen.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schwache Dämpfung ( $\beta^2 < 4km$ )



Plots der Lösungen für  $\beta = 0.1, 0.2, 0.5$  und  $1$ . Restliche Parameter:  $k = m = 1$ ,  $x_0 = 1$ .  
Zum Vergleich jeweils die Lösung für  $\beta = 0$  (grün).

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Starke Dämpfung, „Kriechfall“ ( $\beta^2 > 4km$ )

Hier besitzt das charakteristische Polynom von (7.33) die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{\beta^2 - 4km},$$

so dass sich als allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\left(-\frac{\beta}{2m} - \frac{1}{2m} \sqrt{\beta^2 - 4km}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{\beta}{2m} + \frac{1}{2m} \sqrt{\beta^2 - 4km}\right)t}$$

ergibt.

Die Lösung zeigt kein „Schwingungsverhalten“ mehr und klingt wegen  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  exponentiell ab.

Mit den Anfangsbedingungen (7.34) bestimmt man die Konstanten  $c_1, c_2$  zu

$$c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} x_0 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} x_0.$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aperiodischer Grenzfall ( $\beta^2 = 4km$ )

Dies ist der Sonderfall (kritische Dämpfung), bei dem sich das qualitative Verhalten der Lösung ändert.

Beim aperiodischen Grenzfall hat das charakteristische Polynom von (7.33) nur eine Nullstelle  $\lambda = -\frac{\beta}{2m}$ .

Als allgemeine Lösung ergibt sich daher

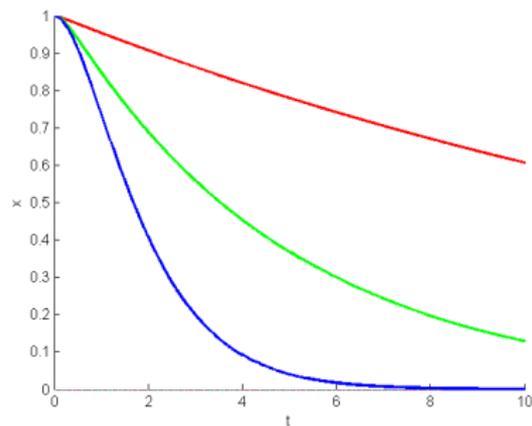
$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{\beta}{2m} t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen (7.34) ergibt sich die spezielle Lösung

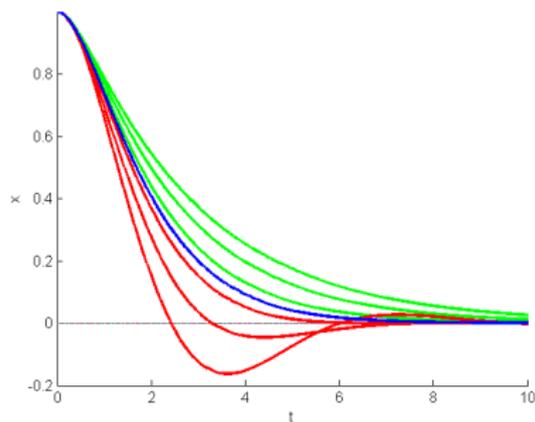
$$x(t) = x_0 \left( 1 + \frac{\beta}{2m} t \right) e^{-\frac{\beta}{2m} t}.$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aperiodischer Grenzfall ( $\beta^2 = 4km$ )



**Bild links:** Kriechfall für verschiedene Dämpfungen,  $\beta = 2.001$  (blau),  $\beta = 5$  (grün),  $\beta = 20$  (rot).



**Bild rechts:** Aperiodischer Grenzfall ( $\beta = 2$ , blau), zusammen mit gedämpften Schwingungen ( $\beta = 1, 1.4$  und  $1.8$ , rot) und Kriechfall ( $\beta = 2.2, 2.6$  und  $3$ , grün).

Weitere verwendete Parameter für beide Bilder:  $k = m = 1$ ,  $x_0 = 1$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Externe Kraft und Resonanz

Wir betrachten noch einmal den ungedämpften Fall ( $\beta = 0$ ), setzen die Masse aber zusätzlich einer periodischen Kraft  $F = F_0 \sin \omega_E t$  aus. Die Konstante  $\omega_E$  heißt **Erregerkreisfrequenz**.

Mit der Abkürzung  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (**Eigenkreisfrequenz**) erhalten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_E t) \quad (7.35)$$

Die Lösung des homogenen Problems kennen wir bereits:

$$x_h(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t),$$

so dass wir nur noch eine spezielle Lösung  $x_s$  von (7.35) benötigen. Wir verwenden dafür die Ansätze auf S. 367.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Externe Kraft und Resonanz

Für  $\omega_E \neq \omega_0$  verwenden wir den Ansatz

$$x_s(t) = A \sin(\omega_E t) + B \cos(\omega_E t)$$

und erhalten  $x_s(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \sin(\omega_E t)$  bzw.

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \sin(\omega_E t).$$

Die Amplitude von  $x_s$  ist offenbar umso größer, je näher  $\omega_E$  bei  $\omega_0$  liegt, genauer gilt sogar

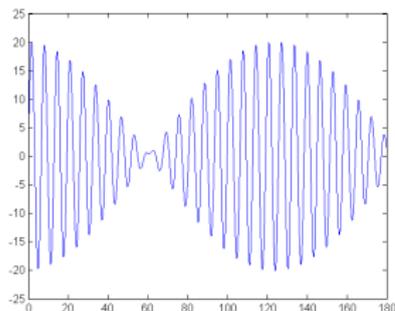
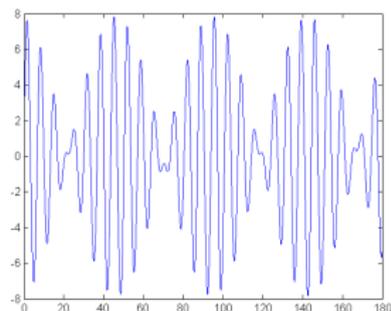
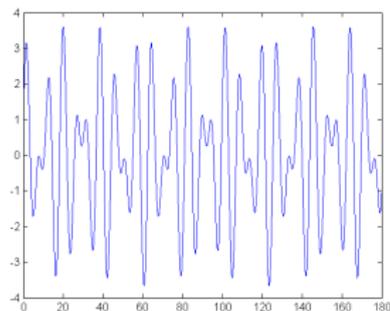
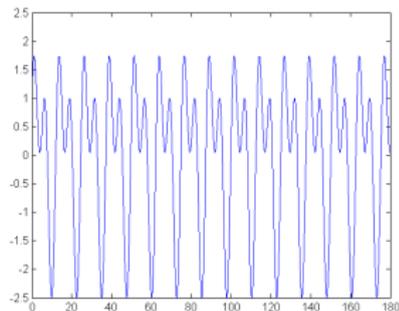
$$\left| \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \right| \rightarrow \infty \quad \text{für } \omega_E \rightarrow \omega_0.$$

Um einige Bilder zeichnen zu können, bestimmen wir auch noch die Konstanten zur Anfangsbedingung (7.34):

$$c_1 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \cdot \frac{\omega_E}{\omega_0} \quad \text{und} \quad c_2 = x_0.$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Externe Kraft und Resonanz



Lösungen von (7.35) mit  $\frac{F_0}{m} = 1$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ , und  $\omega_E = 0.5, 0.7, 0.87$  und  $0.95$ .  
Beachten Sie die verschiedenen Skalierungen der  $y$ -Achse.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Externe Kraft und Resonanz

Im Resonanzfall  $\omega_E = \omega_0$  wird man für  $x_s$  folgenden Ansatz wählen:

$$x_s(t) = t(A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert dann  $A = \frac{F_0}{2m\omega_0}$  und  $B = 0$  bzw.

$$x(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t - \frac{F_0}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

Diese Lösung ist für  $t \rightarrow \infty$  unbeschränkt!

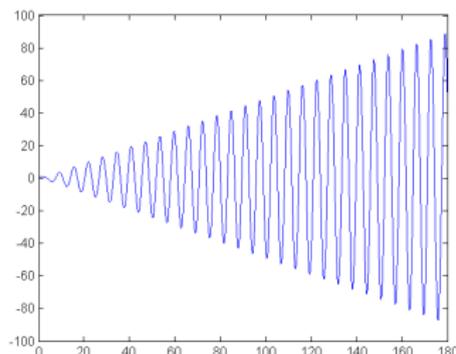
Zum Zeichnen eines Bildes berechnen wir noch die Konstanten zur Anfangsbedingung (7.34):

$$c_1 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad \text{und} \quad c_2 = x_0.$$

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Externe Kraft und Resonanz

Für das gleiche System wie auf S. 381 mit  $\omega_E = \omega_0 = 1$  ergibt sich folgender Verlauf der Lösung:



Das schwingende System schwingt sich also mit zunehmender Zeit immer weiter auf (**Resonanzkatastrophe**).

In der Praxis wird dem natürlich eine Grenze gesetzt, z. B. durch das Anstoßen der Kugel an der Aufhängung oder durch den Bruch der Feder.

# Lineare Dgln. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Externe Kraft und Resonanz

Für gedämpfte Systeme kann man ebenfalls Resonanzen untersuchen. Hier bleibt die Amplitude zwar grundsätzlich beschränkt, für kleine Dämpfungen aber u.U. auf sehr hohem Niveau.

Übersteigt die Amplitude das vom System verkraftbare Maß, so kommt es auch hier zur Zerstörung – erinnern Sie sich?



# Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Nachbereitung):

- die grundlegenden Begriffe zu Differentialgleichungen beherrschen (z. B. spezielle und allgemeine Lösung, AWP),
- die hier behandelten Typen von Differentialgleichungen sicher klassifizieren können,
- grob über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von AWP bescheidwissen,
- wissen, was man unter einem Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung versteht,
- grob über das Euler-Verfahren bescheidwissen (evtl. auch ein kleines Programm schreiben können),
- Trennung der Variablen mit all ihren Facetten sicher anwenden können,
- lineare Differentialgleichungen mit Trennung der Variablen und Variation der Konstanten sicher lösen können,

# Ziele erreicht?

- lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sicher lösen können,
- wissen, wie man lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten löst (diagonalisierbarer Fall reicht),
- einen Überblick über die Anwendung von Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften besitzen.