

**Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)**  
Sommersemester 2016

9. Übung: Potenz- und Fourierreihen

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie Konvergenzradius und Konvergenzintervall zu folgenden Potenzreihen.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

**Aufgabe 2**

Entwickeln Sie die folgenden reellen Funktionen um die Stelle  $x_0 = 0$  in Potenzreihen und geben Sie deren Konvergenzradius an.

a)  $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$     b)  $f_2(x) = 1 + x^2 + e^{2x}$     c)  $f_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$     d)  $f_4(x) = \ln(1+x)$

*Hinweis:* Nutzen Sie bekannte Potenzreihenentwicklungen.

**Aufgabe 3**

Geben Sie für folgende Potenzreihen die Summenfunktion sowie das Konvergenzintervall an.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$     b)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$     e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}$

**Aufgabe 4**

Es sei  $g(x) := x^2$  für  $\pi < x \leq \pi$ . Bestimmen Sie die Fourierreihe der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzung von  $g$  auf  $\mathbb{R}$ .

**Aufgabe 5**

Gegeben ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} \pi, & \text{für } -\pi < x \leq 0; \\ x, & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Ihre Fourierreihe werde mit  $\hat{f}(x)$  bezeichnet. Geben Sie  $\hat{f}(3\pi)$  und  $\hat{f}(4\pi)$  an.

**Aufgabe 6**

Es sei eine  $2\pi$ -periodische Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x, & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion  $f$  gerade oder ungerade?

- (b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von  $f$ .  
(c) Nutzen Sie die berechnete Fourierreihe um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

zu bestimmen.

### **Aufgabe 7**

Die Fourierreihe einer Funktion  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

kann man auch mittels der komplexen Exponentialfunktion darstellen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

- (a) In welchen Zusammenhang stehen die Koeffizienten  $a_k$ ,  $b_k$  und  $c_k$ ?  
(b) Berechnen Sie mittels der komplexen Fourierreihe die Koeffizienten  $a_k, b_k$  der trigonometrischen Fourierreihe von

$$f(x) = e^x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$