TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 25. April 2016
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Roman Unger, Dr. Michael Weise,
Dipl.-Math. Ailyn Stötzner, Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2016

3. Übung: Funktionen

Aufgabe 1

Man bilde zu folgenden reellen Funktionen die Umkehrfunktion und zeichne die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion jeweils in ein und dasselbe Diagramm.

(a) $f(x) = 1 + \ln x$, (b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Aufgabe 2

Zeichnen Sie den Graphen von $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$. Wie ändert sich der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ beim Übergang zu

(a) $x \mapsto f(kx)$, (b) $x \mapsto kf(x)$?

Unterscheiden Sie dabei die Fälle $k > 0$ und $k < 0$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils den Wertebereich an. Sind die angegebenen Funktionen beschränkt?

(a) $f(x) = \frac{a}{x},\ a \neq 0$, (b) $f(x) = \frac{1}{x^2-6x+10}$, (c) $f(x) = \arctan\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2}\right),\ x > 0$.

Aufgabe 4

(a) Sind die angegebenen reellen Funktionen gerade bzw. ungerade?

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = x^5 + 7x, \quad f_3(x) = x\sin x, \quad f_4(x) = x(e^x + e^{-x}).$$

(b) Sind folgende Funktionen periodisch? Geben Sie, falls möglich, die primitive Periode an.

$$f_1(x) = \cos(2-\pi x), \quad f_2(x) = -\mathrm{e}^{\cos 4x}, \quad f_3(x) = \sin x + \cos \pi x, \quad f_4(x) = \ln(2\sin^2 x + 1).$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für gerade Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch alle Funktionen vom Typ $f + \lambda g$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ wieder gerade sind. Was lässt sich damit über die Summe und Differenz von f und g sagen?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}, & \text{für } |x| \neq 1; \\ 0, & \text{für } |x| = 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie, sofern existent, die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1+} f(x), \quad \lim_{x\to 1-} f(x), \quad \lim_{x\to 1} f(x), \quad \lim_{x\to -1+} f(x), \quad \lim_{x\to -1-} f(x), \quad \lim_{x\to -1} f(x).$$

Was lässt sich damit über die Stetigkeit von f sagen?

Aufgabe 7

In welchen Punkten sind folgende Funktionen stetig? Untersuchen Sie insbesondere die Grenzwerte für $x \to 0$ und $x \to 1$ und skizzieren Sie auch die zugehörigen Graphen.

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{für } 0 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{für } x > 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0; \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{für } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{für } x > 1. \end{cases}$,

Aufgabe 8

Wie müssen die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \alpha \sin x + \beta, & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

überall stetig ist.