

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK) Sommersemester 2016

2. Übung: Reihen

Aufgabe 1

Eine *Teleskopsumme* ist eine Summe der Form $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$. Für diese gilt $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

Weisen Sie mit einer geeigneten Teleskopsumme nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

gilt, und bestimmen Sie damit den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Aufgabe 2

Für die Partialsummenfolge (s_n) einer Folge (a_k) gelte

$$s_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Bestimmen Sie die Glieder a_k der Folge (a_k) und sowie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Summen folgender Reihen:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^{2k+3}}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}}.$$

Aufgabe 4

Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{(2a)^k}$?

Aufgabe 5

Untersuchen Sie folgende Reihen mittels Quotientenkriterium auf Konvergenz.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-2}{3^{k+4}} 3^k, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}.$$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie folgende Reihen mittels Wurzelkriterium auf Konvergenz.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+42}{2k+7} \right)^k.$$

Aufgabe 7

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. Verwenden Sie geeignete Kriterien.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+7}{5^k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{7+\frac{1}{k}}, \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{(k+2)^2}, \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}.$$

Aufgabe 8

Untersuchen Sie folgende Reihen mittels Majoranten- oder Minorantenkriterium auf Konvergenz.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2+k}, \quad (b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^3-k}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$