TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 25. April 2016
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Roman Unger, Dr. Michael Weise,
Dipl.-Math. Ailyn Stötzner, Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2016

1. Übung: Folgen

Aufgabe 1

Geben Sie eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift zu einer Folge (a_n) an, deren Glieder wie folgt lauten:

(a) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

(b) $-2, -5, -8, -11, -14, \ldots$

Setzen Sie die Folge entsprechend dieser Bildungsvorschrift um drei Glieder fort.
Handelt es sich bei der von Ihnen gefundenen Folge jeweils um eine arithmetische oder geometrische Folge? Wenn ja, bringen Sie die Bildungsvorschrift bitte in die Standardform aus der Vorlesung.

Aufgabe 2

Zeigen Sie anhand der Grenzwertdefinition, dass (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2n-1}$ eine Nullfolge ist. Wie groß ist $n_0 \in \mathbb{N}$ mindestens zu wählen, dass $|a_n| < 10^{-4}$ für $n \geq n_0$ gilt?

Aufgabe 3

Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$, und was ist der entsprechende Wert?

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{11-n^2}{n+2}$, (b) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$, (c) $a_n = \frac{n-4}{n^2+3n+8}$, (d) $a_n = \frac{3n^5+n^3-1}{12n^5+23}$,

(e) $a_n = (-1)^n \frac{n^2+n+2}{5n^2+4n+3}$, (f) $a_n = (-1)^n \frac{n^2+2}{5n^3+4n+3}$, (g) $a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$, (h) $a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{5^n}$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Ermitteln Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{n+3}{n}$, (b) $b_n = 1 + 2^n + (-2)^n$, (c) $c_n = \sqrt{1 - \cos(\frac{1}{n})}$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2(1+\frac{1}{n})^n + \sqrt[n]{4n}\right)$.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{9n+1}$, (b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (c) $c_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$, (d) $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{2}$, (e) $e_n = n^{(-1)^n}$.