Studiengang	
Matrikelnummer	Name, Vorname

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/ 4	/ 4	/ 8	/ 6	/ 8	/ 4	/ 4	/ 38

Probeklausur Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2016

Hinweis zur Bearbeitung:
Sämtliche Aussagen müssen begründet werden. Auf Antworten ohne Angabe des Lösungswegs werden keine Punkte vergeben.

Aufgabe 1 *(2+2 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen

$$a_n = \frac{(2n+1)^2}{n^2}, \qquad b_n = \frac{\sin(42n+1)}{\sqrt{n}}.$$

(b) Untersuchen Sie die gegebenen Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-4}{2k^2+8}.$$

Aufgabe 2 *(2+2 Punkte)*

Wir betrachten folgende abschnittsweise definierte Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \beta + \sin(2x), & \text{für } x \leq 0, \\ \gamma x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Dabei sind β und γ reelle Parameter.

(a) Welche Bedingungen sind an die Parameter β und γ zu stellen, damit f stetig ist?

(b) Kann man die Parameter β und γ auch so wählen, dass f differenzierbar ist? Wenn ja, geben Sie alle Möglichkeiten für eine solche Parameterwahl an.

Aufgabe 3 *(4+2+2 Punkte)*

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax\mathrm{e}^{2-ax}$$

mit $a > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie Lage und Art der lokalen Extrema.

(b) Analysieren Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen, d. h. für $x \to \pm\infty$.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f in $x_0 = 0$.

Aufgabe 4 *(3+3 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von $f(x) = \frac{42}{x^2-1}$.

(b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

mit $a > 0$ auf Konvergenz. Geben Sie im Falle der Konvergenz den Wert des Integrals an.

Aufgabe 5 *(3+3+2 Punkte)*

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme bzw. Differentialgleichungen:

(a) $y'(t) = \frac{2t}{1+t^2}\,y^2(t), \qquad y(0) = 1,$

(b) $y'(t) = (t+1)^2 + \frac{1}{1+t}\,y(t), \qquad y(1) = 0,$

(c) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0.$

Aufgabe 6 *(2+2 Punkte)*

Ermitteln Sie das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihen und bestimmen Sie deren Summenfunktion:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$, $\qquad$ (b) $\displaystyle 1-x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$.

Aufgabe 7 *(1+3 Punkte)*

Gegeben ist eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Ist f eine gerade oder eine ungerade Funktion auf $[-\pi, \pi]$?

(b) Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von f.