Mathematik II

(für Informatiker, ET und IK)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2016

Mathematik ! TU Chemnitz

Inhalt I

Inhalt II

Inhalt III

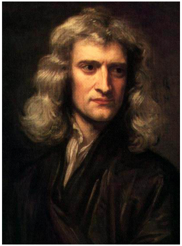
Inhalt

Differentialrechnung

Differential- und Integralrechnung werden oft im Begriff Infinitesimalrechnung zusammengefasst, da beide auf der Untersuchung von Funktionen „im Kleinen“, also lokal, beruhen. Das hierdurch breitgestellte Instrumentarium lieferte den Schlüssel zur mathematischen Beschreibung von Phänomenen in nahezu allen wissenschaftlichen Gebieten.

Deren Entwicklung erfolgte unabhängig voneinander durch Leibniz in Deutschland und Newton in England. Die unabhängige Leistung gilt heute als gesichert, damals allerdings kam es zum bekanntesten Prioritätsstreit der Wissenschaftsgeschichte.

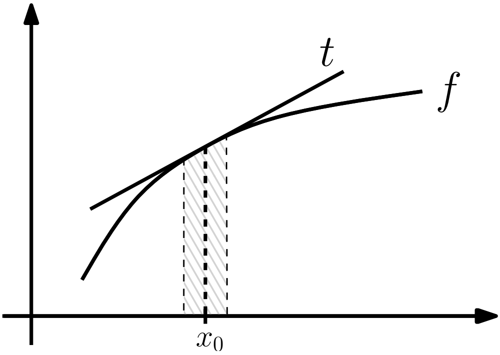
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)



Sir Isaac Newton (1643–1727)

Inhalt

Ersetzt man eine Funktion f nahe einer Stelle x_0 durch ihre Tangente $t(x)$, so macht man in der Nähe von x_0 nur kleine Fehler.



Die Tangente ist dabei als lineare Funktion viel leichter zu handhaben, als die Funktion f selbst.

Definition 5.1 (Ableitung)

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $x_0 \in D_f$ innerer Punkt von D_f. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert

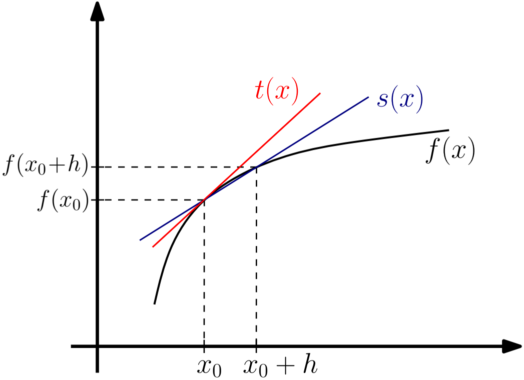
$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt erste Ableitung von f an der Stelle x_0.

Ist f an jeder Stelle $x_0 \in M \subseteq D_f$ differenzierbar, so heißt f in M differenzierbar. Man nennt die Funktion

$$f' : M \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f'(x),$$

dann die Ableitung oder Ableitungsfunktion von f.



$$s(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}(x-x_0)$$

$$\Big\downarrow h \to 0$$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Für $h \to 0$ geht die Sekante $s(x)$ durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ in eine Tangente $t(x)$ über.

Die Ableitung $f'(x_0)$ ist also der Anstieg der Tangente t an f im Punkt x_0.

Ist zu einer Funktion f die Ableitung f' in x_0 ebenfalls differenzierbar, so heißt

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die zweite Ableitung von f an der Stelle x_0.

Entsprechend wird (für $n \in \mathbb{N}$) die n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$$

von f an der Stelle x_0 definiert. (Dabei ist $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$ zu setzen.)

Zur Notation:

- Für die ersten drei Ableitungen schreibt man f', f'' und f'''.
- Ab $n = 4$ schreibt man zumeist $f^{(n)}$.
- In den Ingenieurwissenschaften sieht man oft auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.
- Zudem sind in der Physik auch $\dot{f}(t)$ und $\ddot{f}(t)$ für die ersten zwei Ableitungen üblich, wenn das Argument t eine Zeit darstellt.

Auf Leibniz geht die folgende Schreibweise für Ableitungen zurück:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0),\\
f''(x_0) &= \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x}(x_0),\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x_0) &= \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f^{(n-1)}}{\mathrm{d}x}(x_0).
\end{aligned}
$$

Diese Schreibweise ist noch heute weit verbreitet, da man damit manche Rechenregeln (z. B. Kettenregel) sehr eingängig fassen kann, und die Variable, nach der man differenziert, eindeutig gekennzeichnet ist.

Leibniz hatte damals die vage Vorstellung, dass sich die erste Ableitung $f'(x_0)$ als Quotient „infinitesimal kleiner Elemente“ $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$ schreiben lässt.

Er betrachtete dazu den **Differenzenquotienten**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und machte gedanklich die Größen Δy und Δx „unendlich klein“.

In Anlehnung an den Differenzenquotienten verwendete er für die erste Ableitung den Ausdruck $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Die lediglich **formale** Quotientenform der Leibniz-Notation lässt sich mit dem Differentialbegriff (siehe später) mathematisch unterlegen. Manchmal nennt man die Ableitung daher auch **Differentialquotient**.

- Die konstante Funktion $f_1(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) ist differenzierbar mit $f_1'(x) = 0$, denn
$$\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \to 0 \quad (h \to 0).$$
- Die Funktion $f_2(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ist differenzierbar mit $f_2'(x) = a$, denn
$$\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a \to a \quad (h \to 0).$$
- Die Funktion $f_3(x) = x^2$ ist differenzierbar mit $f_3'(x) = 2x$, denn
$$\frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \to 2x \quad (h \to 0).$$

Ohne Beweis geben wir hier noch einige weitere Funktionen mit ihren Ableitungen an:

- Für $f_1(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $f_1'(x) = nx^{n-1}$.
- Für $f_2(x) = \mathrm{e}^x$ gilt $f_2'(x) = f_2(x) = e^x$.
- Für $f_3(x) = \sin x$ gilt $f_3'(x) = \cos x$.
- Für $f_4(x) = \cos x$ gilt $f_4'(x) = -\sin x$.

Ausgehend von der Definition der Ableitung bestimme man die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$.

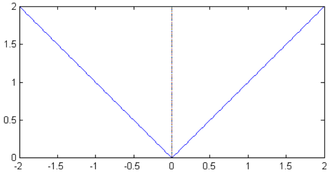
Differenzierbarkeit

Beispiel für eine nicht differenzierbare Funktion

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ **nicht** differenzierbar, denn

- $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0+} \frac{h-0}{h} = 1$, aber
- $\lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{-h-0}{h} = -1 \neq 1.$

Der Differenzenquotient besitzt also keinen Grenzwert für $h \to 0$.



Der bei $x_0 = 0$ auftretende „Knick“ ist typisch für Funktionen, die stetig, aber nicht differenzierbar sind. Es ist offensichtlich, dass man in diesem Punkt keine eindeutig bestimmte Tangente finden kann.

Satz 5.2

Ist $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D_f$ differenzierbar, dann ist f in x_0 auch stetig.

Beweisidee:

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \to 0 \qquad (x \to x_0).$$

Achtung: Wie das Beispiel $f(x) = |x|$ zeigt, gibt es sehr wohl stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind. Die Umkehrung von Satz 5.2 ist also falsch!

Differenzierbarkeit ist in diesem Sinne eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit.

Wir wollen noch einmal den Bezug der Funktion f zu ihrer Tangente t nahe x_0 aufgreifen. Dabei hilft folgende alternative Charakterisierung der Differenzierbarkeit:

Satz 5.3

Eine reelle Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D_f$ differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\phi : D_f \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + \phi(x), \tag{5.1}$$

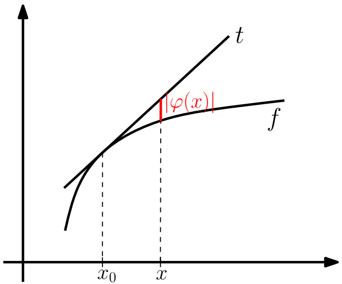
wobei $\frac{\phi(x)}{x - x_0} \to 0$ für $x \to x_0$. In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Mit der Tangentenfunktion $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ liest sich (5.1) für eine differenzierbare Funktion f als

$$f(x) = t(x) + \phi(x) \quad \text{mit } \frac{\phi(x)}{x - x_0} \to 0 \text{ für } x \to x_0.$$

Grob gesprochen: „Funktion = Tangente + Restterm, wobei der Restterm für $x \to x_0$ schneller als linear gegen Null geht".

Visualisierung:



Überzeugen Sie sich, dass mit $\frac{\phi(x)}{x-x_0} \to 0$ erst recht $\phi(x) \to 0$ für $x \to x_0$ gilt.

Inhalt

Satz 5.4 (Regeln für die Ableitung)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$.
Dann sind auch $cf (c \in \mathbb{R}), f \pm g$, fg und f/g (falls $g(x_0) \neq 0$) in x_0 differenzierbar.

Dabei gelten folgende Regeln:

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \quad c \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \qquad \text{(Summenregel)},$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \text{(Produktregel)},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}.$$

Finden Sie die Ableitungen von

- $f_1(x) = 7x^2 + 4x - 8$,
- $f_2(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$,
- $f_3(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$,
- $f_4(x) = \frac{1}{x^2}$,
- $f_5(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, ausgehend von $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Satz 5.5 (Kettenregel)

Ist $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D_f$ differenzierbar und $g : D_g \to \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in D_g$ differenzierbar, dann ist $(g \circ f)$ ebenfalls in x_0 differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{5.2}$$

Die Multiplikation mit $f'(x_0)$ in (5.2) nennt man auch „Nachdifferenzieren“.

Außerdem sind für g' und f' die Begriffe „äußere“ und „innere“ Ableitung gebräuchlich.

In Leibniz-Notation schreibt man für (5.2) mitunter kurz $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Man bestimme die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^{3x^2+1}$.

Satz 5.6

Die reelle Funktion $f : D_f \to W_f$ sei in $x_0 \in D_f$ differenzierbar und besitze die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to D_f$. Ist $f'(x_0) \neq 0$ und ist f^{-1} stetig in $f(x_0)$, dann ist f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \textit{bzw.} \; (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \; \textit{für } y_0 = f(x_0).$$

Leibniz-Notation:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \qquad \text{für} \qquad y = f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad x = f^{-1}(y)$$

Für

$$y = f(x) = \sin x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

gilt $f'(x) = \cos x \neq 0$. Desweiteren ist $f^{-1}(y) = \arcsin y$ stetig. Damit gilt nach Satz 5.6:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Bestimmen Sie auf diese Weise die Ableitungen von $f_1(x) = \ln x$ und $f_2(x) = \sqrt{x}$.

Wie lässt sich die Ableitung einer beliebigen Potenzfunktion $f(x) = x^r$ $(x > 0, r \in \mathbb{R})$ bestimmen?

Die Kettenregel liefert für positive differenzierbare Funktionen f die Gleichung

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

bzw.

$$f'(x) = (\ln(f(x)))' f(x).$$

Dieser „Trick" erleichtert manchmal die Berechnung der Ableitung.

Beispiel: Für $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ gilt

$$(x^x)' = (\ln(x^x))' x^x = (x \ln x)' x^x = (1 + \ln x) x^x.$$

Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$.

Inhalt

Ableitungen elementarer Funktionen

Mit Hilfe von Definition 5.1 und der Regeln aus Abschnitt 2 lassen sich zu vielen gebräuchlichen Funktionen Ableitungen gewinnen.

Die folgenden Tabellen (betrifft vor allem diese Seite) sollten Sie am besten auswendig lernen.

Potenz- und Exponentialfunktionen, Logarithmen

$f(x)$	$x^r \ (r \in \mathbb{R})$	e^x	$\ln x$	$a^x \ (a > 0)$	$\log_a x$
$f'(x)$	rx^{r-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$

Trigonometrische Funktionen

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Ableitungen elementarer Funktionen

Arkusfunktionen

$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\operatorname{arccot} x$
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Hyperbelfunktionen

$f(x)$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\coth x$
$f'(x)$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

Areafunktionen

$f(x)$	$\operatorname{arsinh} x$	$\operatorname{arcosh} x$	$\operatorname{artanh} x$	$\operatorname{arcoth} x$
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$

Inhalt

Mit der Differentialrechnung steht uns nun ein sehr mächtiges Instrument zur Untersuchung reeller Funktionen zur Verfügung. Wir beginnen mit etwas Begriffsbildung.

Definition 5.7 (Lokale Extrema)

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Ein Punkt $x_0 \in D_f$ heißt lokales Maximum [lokales Minimum] von f, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad [f(x_0) \leq f(x)] \quad \text{für alle } x \in D_f \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon). \tag{5.3}$$

x_0 heißt lokales Extremum von f, wenn x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f ist.

Bei einem lokalen Extremum x_0 betrachtet man also nur das Verhalten der Funktion f sehr nahe bei x_0.

Das Gegenstück sind globale Extrema, bei denen die Beziehung $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)$ aus (5.3) für **alle** $x \in D_f$ gelten muss.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\cos 2x,$
- $g : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{1+x}\cos x$

(qualitativ reicht), und machen Sie sich den Unterschied zwischen „global“ und „lokal“ auch graphisch klar.

Bei differenzierbaren Funktionen ist die Suche nach lokalen Extrema eher einfach:

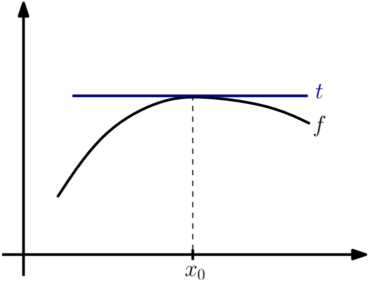
Satz 5.8 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Besitzt die differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *im Punkt* $x_0 \in (a, b)$ *ein lokales Extremum, so gilt*

$$f'(x_0) = 0. \tag{5.4}$$

Mit Satz 5.8 kann man also die „Kandidaten“ finden, die für ein lokales Extremum überhaupt in Frage kommen.

Nur für diese wird man dann einen konkreten Nachweis versuchen.



An einer Extremalstelle x_0 besitzt die Funktion f aus Satz 5.8 eine horizontale Tangente.

Finden Sie die Beweisidee von Satz 5.8. Betrachten Sie dafür das Vorzeichen des Differenzenquotienten in x_0 für $h > 0$ und $h < 0$.

Hat man mittels Satz 5.8 Kandidaten für lokale Extrema gefunden, prüft man häufig folgende Bedingung:

Satz 5.9 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$. Dann ist x_0

- *Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f''(x_0) > 0$,*
- *Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f''(x_0) < 0$.*

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Analysieren Sie das Verhalten von $f(x) = x^n$ $(n = 2, 5, 6)$ im Hinblick auf die Sätze 5.8 und 5.9 und das tatsächliche Auftreten von Extrema.

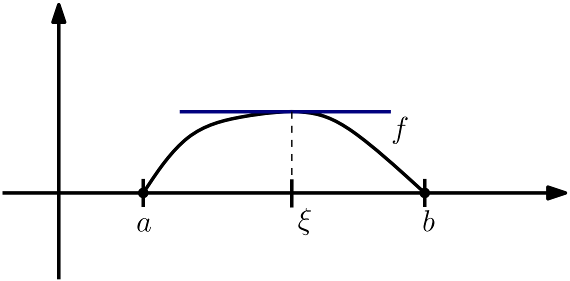
Wir fahren mit einem Ergebnis fort, das für den Anwender eher den Charakter eines Lemmas hat, aber an vielen Stellen von zentraler Wichtigkeit ist.

Wir beginnen mit einem einfachen Spezialfall:

Satz 5.10 (von Rolle*)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und in* (a, b) *differenzierbar, und gilt* $f(a) = f(b)$, *dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

*) Michel Rolle, frz. Mathematiker, 1652-1719



Beweisidee:

- f nimmt auf $[a, b]$ Maximum und Minimum an. (Warum?)
- Liegen Maximum und Minimum auf dem Intervallrand, so ist $f(x) = f(a) = f(b)$ auf $[a, b]$, d.h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- Ansonsten gibt es ein lokales Extremum $\xi \in (a, b)$. Für dieses gilt $f'(\xi) = 0$ nach Satz 5.8.

Mittelwertsatz

Die Voraussetzung $f(a) = f(b) = 0$ kann durch folgende Modifikation entfernt werden:

Satz 5.11 (Mittelwertsatz)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und in* (a, b) *differenzierbar, dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

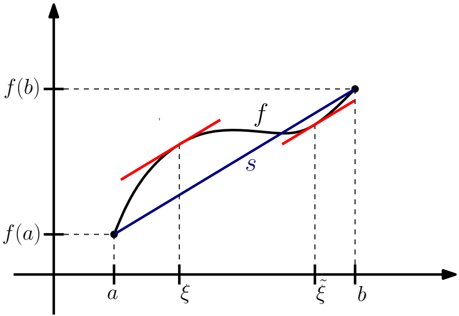
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \tag{5.5}$$

Beweisidee: Anwendung des Satzes von Rolle auf

$$F(x) := f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)}_{\text{Sekante}}.$$

Mittelwertsatz

Graphische Darstellung



Die Funktion nimmt an mindestens einer Zwischenstelle ξ den Anstieg der Sekante s durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ an.

Hat ein Autofahrer, der eine Tempo-30-Zone mit durchschnittlich 38 km/h durchfährt, eine Ordnungswidrigkeit begangen? Lässt sich ggf. der exakte Ort der Tempoüberschreitung bestimmen?

Mit dem Mittelwertsatz lässt sich sofort ein Ergebnis zur Bestimmung des Monotonieverhaltens einer differenzierbaren Funktion herleiten:

Folgerung 5.12

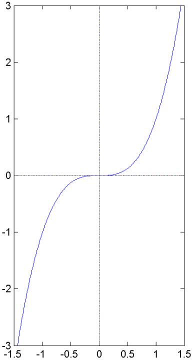
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b).

- *Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.*
- *Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton wachsend (bzw. fallend).*
- *Ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend).*

Führen Sie den Beweis für einen Punkt Ihrer Wahl aus.

Die Funktion $f(x) = x^3$ ist, wie in Kapitel 4 diskutiert, **streng** monoton wachsend, da aus $x < y$ immer $x^3 < y^3$ folgt.

Versuchen Sie sich an einem Nachweis mittels Folgerung 5.12.



Definition 5.13

Eine reelle Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt konvex [konkav] im Intervall $I \subset D_f$, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ [f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)] \end{aligned} \tag{5.6}$$

gilt.

Veranschaulichung: Die Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ verläuft in $[x, y]$ oberhalb [unterhalb] des Graphen von f.

Machen Sie sich klar, warum diese Veranschaulichung korrekt ist.

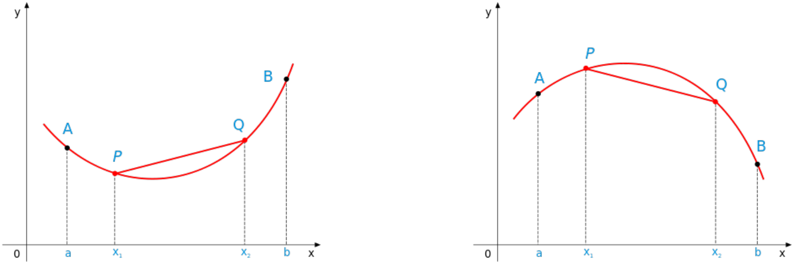


Bild einer konvexen (links) und einer konkaven Funktion (rechts).

Die bei Bewegung "von links nach rechts" auftretende Links- und Rechtskrümmung ist typisch; insbesondere wenn in (5.6) die strengen Ungleichungsrelationen gelten.

Finden Sie ein Beispiel für eine auf $\mathbb{R}$ konvexe [konkave] Funktion.

Wie folgende Sätze zeigen, wird die Untersuchung der Krümmung leichter, wenn man Ableitungen zur Verfügung hat.

Satz 5.14

Ist die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, so definieren wir für jedes* $z \in (a, b)$ *die „Tangentenfunktion“*

$$t_z : x \mapsto f(z) + f'(z)(x - z).$$

f *ist in* (a, b) *genau dann konvex [konkav], wenn*

$$f(x) \geq t_z(x) \quad [f(x) \leq t_z(x)]$$

für alle $z \in (a, b)$ *und alle* $x \in (a, b)$ *gilt.*

Vereinfacht: Jede Tangente an f verläuft unterhalb [oberhalb] des Graphen von f.

Satz 5.15

Ist die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist f genau dann konvex [konkav] in (a,b), wenn f' in (a,b) monoton wachsend [fallend] ist.

Ist f zweimal differenzierbar, dann ist f in (a,b) genau dann konvex [konkav], wenn

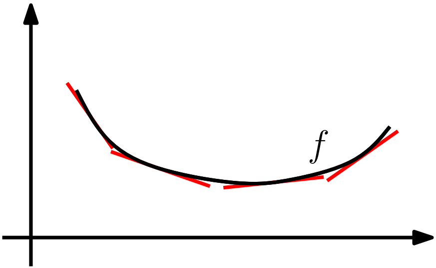
$$f''(x) \geq 0 \quad [f''(x) \leq 0]$$

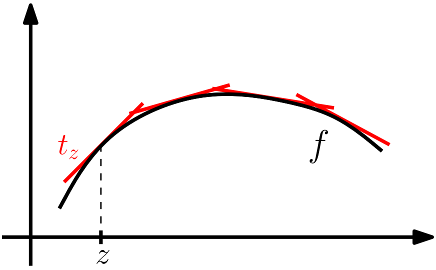
für alle $x \in (a,b)$ gilt.

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen $f_1(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x$, $f_3(x) = \ln x$ und $f_4(x) = \sin x$ mit Hilfe von Satz 5.15.

Krümmungsverhalten

Zusammenhang mit Ableitungen, graphische Darstellung





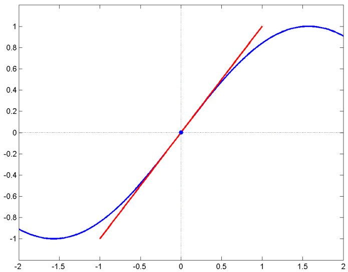
Situation der Sätze 5.14 und 5.15 am Beispiel einer konvexen (links) und einer konkaven Funktion (rechts).

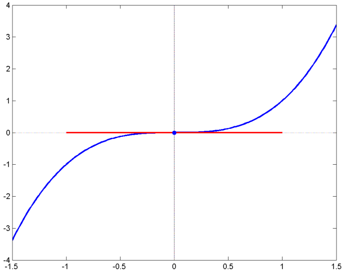
Machen Sie sich die Aussagen von Satz 5.14 und 5.15 noch einmal anhand der Bilder plausibel.

Definition 5.16 (Wende- und Sattelpunkt)

Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ des Graphen, an dem sich das Krümmungsverhalten einer Funktion f ändert, heißt Wendepunkt von f. Die Stelle x_0 heißt Wendestelle.

Die Tangente in einem Wendepunkt heißt Wendetangente. Einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente nennt man auch Sattelpunkt.





Ist Differenzierbarkeit gegeben, ist die Bestimmung von Wendepunkten wieder einfacher:

Satz 5.17

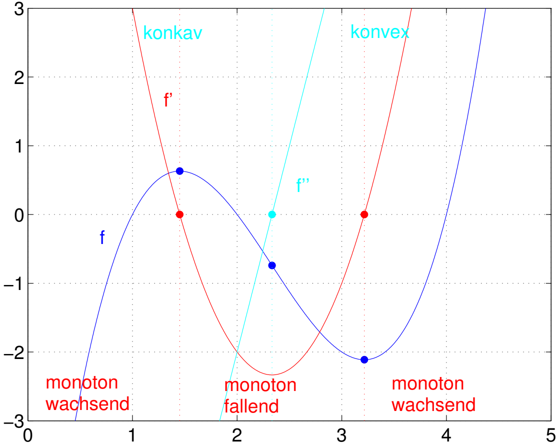
Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar und* $(x_0, f(x_0))$ *ein Wendepunkt von* f*, dann ist* $f''(x_0) = 0$.

Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *dreimal differenzierbar und gilt für ein* $x_0 \in (a, b)$

$$\text{sowohl} \quad f''(x_0) = 0 \quad \text{als auch} \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

dann ist $(x_0, f(x_0))$ *ein Wendepunkt von* f.

Man bestätige das Vorliegen eines Wende-/Sattelpunkts in den Beispielen von Folie 202 mit Hilfe von Satz 5.17.



Dargestellt ist eine Funktion f, ihre Ableitungen f' und f'', sowie die resultierenden Monotonie- und Krümmungsbereiche.

Inhalt

Eine Kurvendiskussion setzt sich aus den folgenden Teilaufgaben zusammen:

- **Definitionsbereich.** Auf welcher (möglichst großen) Menge D_f ist die Funktion f definiert?
- **Wertebereich.** Welche Werte kann $f(x)$ ($x \in D_f$) annehmen?
- **Symmetrien.** Ist f gerade oder ungerade?
- **Nullstellen.** Löse $f(x) = 0$.
- **Extrema.** Bestimme die Lösungen x_{E} von $f'(x) = 0$.
  Ist $f''(x_{\mathsf{E}}) > 0$, dann ist $(x_{\mathsf{E}}, f(x_{\mathsf{E}}))$ ein lokales Minimum von f.
  Ist $f''(x_{\mathsf{E}}) < 0$, dann ist $(x_{\mathsf{E}}, f(x_{\mathsf{E}}))$ ein lokales Maximum von f.
- **Wendepunkte.** Bestimme die Lösungen x_{W} von $f''(x) = 0$.
  Ist $f'''(x_{\mathsf{W}}) \neq 0$, dann ist $(x_{\mathsf{W}}, f(x_{\mathsf{W}}))$ ein Wendepunkt von f.

Verschiedene Anwendungen

Kurvendiskussion

- **Verhalten an Polstellen.** Ist f eine rationale Funktion, bestimme die Pole x_P von f (Nullstellen des Nennerpolynoms) und berechne $\lim\limits_{x \to x_\mathsf{P}-} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x \to x_\mathsf{P}+} f(x)$.
- **Verhalten im Unendlichen.** Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
- **Monotoniebereiche.** Untersuche Vorzeichen von $f'(x)$.
- **Krümmungsverhalten.** Untersuche Vorzeichen von $f''(x)$.
- **Graphische Darstellung.**

Führen Sie eine Kurvendiskussion für $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ durch. Erinnern Sie sich an einen Geldschein, auf dem der Funktionsgraph zu finden war?

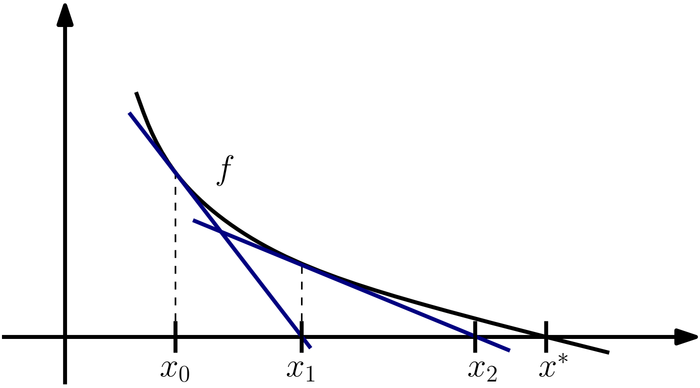
In Abschnitt 5.3 hatten wir das Intervallhalbierungsverfahren zur Lösung von Gleichungen der Form

$$f(x) = 0 \tag{5.7}$$

kennengelernt.

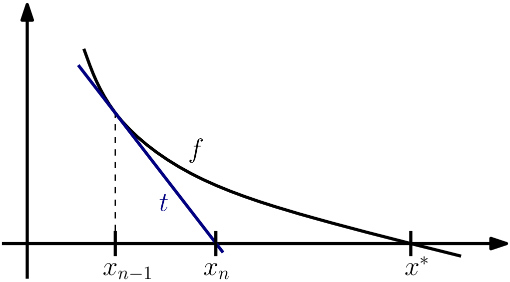
Mit dem Newton-Verfahren behandeln wir nun ein Verfahren für differenzierbare Funktionen f, welches im Allgemeinen wesentlich schneller ist.

Ziel ist die Bestimmung einer Lösung x^* von (5.7) – ausgehend von einem Startwert x_0, der möglichst in der Nähe von x^* liegt.



Man berechnet im n-ten Schritt die Nullstelle x_n der Tangente t an f in x_{n-1}. Diese wird als neue Näherung für x^* verwendet.

Natürlich wird man zu Beginn einen Startwert x_0 wählen müssen.



Wir stellen die Bedingung

$$t(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Umstellen nach x_n führt auf die Verfahrensvorschrift des Newton-Verfahrens:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.8}$$

Verschiedene Anwendungen

Newton-Verfahren: Numerisches Experiment

Für das Beispiel $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ aus Abschnitt 4.3 liefert (5.8) die Vorschrift

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} + \mathrm{e}^{x_{n-1}}}{1 + \mathrm{e}^{x_{n-1}}}.$$

Ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ liefert Matlab folgende Werte:

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	$\underline{-0.5}00000000000000$	$1.06 \cdot 10^{-1}$
2	$\underline{-0.56}6311003197218$	$1.30 \cdot 10^{-3}$
3	$\underline{-0.567143}165034862$	$1.96 \cdot 10^{-7}$
4	$\underline{-0.56714329040978}1$	$4.55 \cdot 10^{-15}$
5	$\underline{-0.567143290409784}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$

Für 14 Nachkommastellen benötigt man gerade 4 Schritte. Das Intervallhalbierungsverfahren hätte dagegen 48 Schritte gebraucht!

Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, dann wesentlich schneller als das Intervallhalbierungsverfahren (Faustformel: in jedem Schritt Verdopplung der Anzahl korrekter Dezimalstellen).

Voraussetzung für Konvergenz ist aber, dass der Startwert x_0 „genügend nahe“ bei x^* liegt („lokal konvergentes Verfahren“).

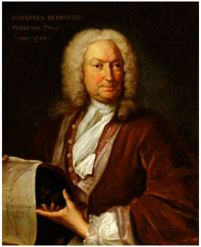
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dagegen zweimal stetig differenzierbar (d.h. f'' ist stetig) sowie konvex, und besitzt f eine reelle Nullstelle, so konvergiert die Newton–Folge für jeden Startwert x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$.

Man mache sich die letzten beiden Aussagen an den Beispielen $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = x^2 \, \mathrm{e}^{-x}$ graphisch klar.

Bei der Berechnung von Grenzwerten der Form $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}$ waren wir bei unbestimmten Ausdrücken wie „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" auf Probleme gestoßen.

Solche Probleme werden häufig leichter, wenn Differenzierbarkeit gegeben ist.

Das betreffende Ergebnis wurde von Johann Bernoulli (1667-1748, links) entwickelt, und vom Marquis de l'Hospital (1661-1704, rechts) im ersten Lehrbuch der Differentialrechnung (1696) veröffentlicht.



Satz 5.18 (De l'Hospital-Regel)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$ *und sei entweder*

- $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$ *oder*
- $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \pm\infty$

Dann gilt

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn der zweite Grenzwert existiert. Hierbei ist $b = \infty$ *erlaubt.*

Entsprechende Aussagen gelten für rechtsseitige und beidseitige Grenzwerte.

Nahe einer Stelle x_0 mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gilt $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ und $g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$. Damit also $\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Beispiele

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{\exp(-x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{-\exp(-x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6x}{\exp(-x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6}{-\exp(-x)} = 0.$

Man berechne die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}$ für $\alpha > 0$.

Wie kann man aus letzterem einem Aussage über $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$ gewinnen?

Die Bedeutung der l'Hospitalschen Regeln wird vom Anfänger oft überschätzt und endet in nervenaufreibenden Rechnungen ohne Ergebnis.

Betrachten Sie dazu zum Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \left(= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = 1 \right).$$

Häufig ist es günstiger, bei der Grenzwertberechnung für unbestimmte Ausdrücke wie „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" auf Potenzreihen zurückzugreifen.

Doch diese Betrachtungen verschieben wir auf später.

Wir kommen noch einmal auf die Leibniz-Schreibweise

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

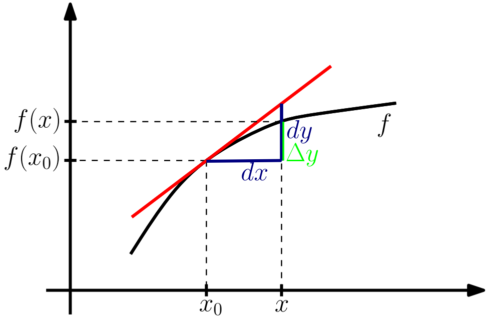
zurück und wollen den (bisher rein symbolischen) Größen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ eine wohldefinierte Bedeutung geben.

Definition 5.19 (Totales Differential)

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine in x_0 differenzierbare Funktion. Für eine beliebige Zahl $\mathrm{d}x = x - x_0$ heißt

$$\mathrm{d}y := f'(x_0)\,\mathrm{d}x = f'(x_0)(x - x_0)$$

totales Differential von f bei x_0.



$\mathrm{d}y$ ist die Änderung der Funktionswerte der Tangente bei Änderung des Arguments um $\mathrm{d}x$.

Idee für Fehlerfortpflanzung

Approximiert man f nahe x_0 durch die Tangente, so gilt näherungsweise

$$f(x) - f(x_0) =: \Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

In Experimenten ist häufig der Einfluss des Fehlers Δx einer Messgröße x auf den Fehler Δy einer berechneten Zielgröße $y = f(x)$ von Interesse.

Mit dem totalen Differential und der eben beschriebenen Idee ergibt sich die Näherungsformel

$$|\Delta y| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x|.$$

Durch Messung der Parallaxe p eines Fixsterns (in $''$) lässt sich mittels

$$r(p) = 1/p$$

der Abstand des Sterns zu Erde errechnen (in Pc; $1\,\mathrm{Pc} \approx 3.262\,\mathrm{ly}$). Die erste Parallaxe wurde 1838 am Stern 61 Cyg von F. W. Bessel mit $p = (0.3483 \pm 0.0095)''$ gemessen.

Welcher Abstand zur Erde ergibt sich? Wie genau ist das Ergebnis?

Inhalt

Mit der ersten Ableitung waren wir in der Lage, Funktionen nahe einer Stelle x_0 linear zu approximieren.

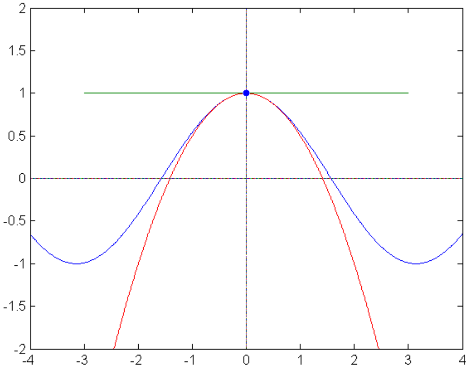
Statt linearer Funktionen kann man auch Polynome höherer Ordnung verwenden und damit ggf. noch bessere Ergebnisse erreichen.

Der betreffende Satz trägt den Namen des englischen Mathematikers Taylor.

Brook Taylor (1685–1731)

Die Funktion $f(x) = \cos x$ (blau) lässt sich nahe $x_0 = 0$ durch die Tangente $t(x) = 1$ approximieren (grün).

Besser ist jedoch die Approximation durch $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ (rot).



Satz 5.20 (Satz von Taylor)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion; $x_0, x \in I$. Dann gibt es eine Zahl ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

mit dem Taylor-Polynom n-ter Ordnung

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

und dem Lagrangeschen Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Für $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$ gilt

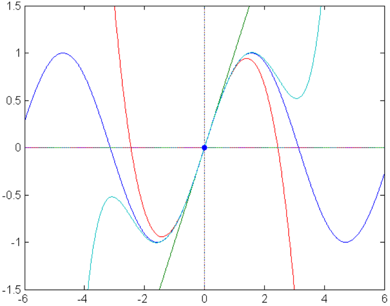
$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)} = f, \quad f^{(5)} = f', \dots$$

Somit ergibt sich

$$f(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 1,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = -1,\ f^{(4)}(x_0) = 0, \dots$$

Die ersten 6 Taylor-Polynome lauten also

- $T_1(x) = 0 + 1(x-0) = x$,
- $T_2(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 = x$,
- $T_3(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 - \frac{1}{6}(x-0)^3 = x - \frac{1}{6}x^3$,
- $T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$,
- $T_5(x) = T_6(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$.



$f(x) = \sin x$ (blau) mit den Taylorpolynomen $T_1(x) = T_2(x)$ (grün), $T_3(x) = T_4(x)$ (rot) und $T_5(x) = T_6(x)$ (türkis) im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Schätzen Sie den relativen Fehler $\left|\frac{\sin x - x}{\sin x}\right|$ der "Physiker-Näherung" $\sin x \approx x$ ($|x|$ klein) für $|x| < 0.1$ mit dem Lagrangeschen Restglied ab.

Verhält sich das Restglied „gutartig“, so approximieren die Taylorpolynome T_n die Funktion f mit größer werdendem n nahe x_0 immer besser.

Im günstigsten Fall lässt sich f in einer Umgebung von x_0 durch eine Taylor-Reihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Wichtige Taylor–Reihen:					
$(1-x)^{-1}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$\lvert x\rvert < 1$	$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$\lvert x\rvert \le 1$
$\exp(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{artanh}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$	$x \in (-1, 1]$	$(1+x)^a$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$	$\lvert x\rvert < 1$

mit $\binom{a}{0} := 1$ und $\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in \mathbb{R}$.

Warnung Es soll aber vor dem Trugschluss gewarnt werden, der Satz von Taylor garantiere die Entwickelbarkeit jeder unendlich oft differenzierbaren Funktion in eine Taylor-Reihe. Vielmehr gilt:

- Es gibt Fälle, in denen die Taylor-Reihe für $x \neq x_0$ überhaupt nicht konvergiert.
- Es gibt Fälle, in denen die Taylor-Reihe für $x \neq x_0$ konvergiert, aber mit der eigentlichen Funktion f nichts zu tun hat.

  Zum Beispiel gilt für

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

  die Beziehung $T_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Informationen über die Konvergenz erhält man mit Hilfe des Restglieds. Dies soll hier aber nicht weiter diskutiert werden.

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- den Ableitungsbegriff und die Idee der linearen Approximation tiefgreifend verstanden haben,
- Funktionen sicher auf Differenzierbarkeit untersuchen und deren Ableitung mit Diffenzenquotient oder Ableitungsregeln sicher bestimmen können,
- alle Punkte einer Kurvendiskussion sicher ausführen können,
- Taylor-Polynome sicher berechnen können und wissen was man unter einer Taylor-Reihe versteht,
- über Newton-Verfahren und Fehlerfortpflanzung grob Bescheid wissen.

Sie sind sich nicht sicher oder meinen „nein“? Sie wissen schon...