Mathematik II
(für Informatiker, ET und IK)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2016

Mathematik!
TU Chemnitz

Inhalt I

Inhalt II

Inhalt III

Inhalt

Inhalt

Betrachten Sie folgende Liste von Zahlen:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \ .$$

Erkennen Sie ein Muster, mit dem man die Liste sinnvoll fortsetzen kann?

Ist die Regel einmal erkannt, so können Sie mit diesem Gesetz zu jeder vorgegebenen Position das zugehörige Element der Liste ausrechnen.

Jeder natürlichen Zahl („Index“) wird dabei eine reelle Zahl („Folgenglied“) zugeordnet – es entsteht eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Diese Abbildungen heißen (reelle) Zahlenfolgen. Sie spielen in vielen Anwendungen eine große Rolle und liefern uns den Schlüssel zum Verständnis des Grenzwerts - des wohl wichtigsten Begriffs der Analysis.

Definition 3.1 (Zahlenfolge)

Eine Abbildung a, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche reelle) Zahlenfolge.

Statt $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreibt man $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (a_n).
$a_n = a(n)$ heißt n-tes Folgenglied dieser Zahlenfolge.

Anmerkung: Wie schon beim Induktionsprinzip kann man als Indexmenge auch jede andere Menge der Form $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ für festes $n_0 \in \mathbb{Z}$ benutzen. Insbesondere ist $\mathbb{N}_0$ zulässig.

Notation für diesen Fall: $(a_n)_{n\geq n_0}$.

Die Beschreibung von Folgen erfolgt in der Regel durch Angabe von Bildungsgesetzen.

Explizites Bildungsgesetz: Der Wert a_n wird mittels einer Gleichung in Abhängigkeit von n angeben (Funktionsvorschrift).

Beispiel: Die Bildungsvorschrift $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ erzeugt die Folge

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots$$

Das 42-te Glied kann man direkt berechnen: $a_{42} = (-1)^{42} \frac{1}{42^2} = \frac{1}{1764}$.

Man gebe die ersten 7 Glieder der Folgen $(\frac{1}{2^n})$ und $(\sqrt[n]{n})$ (ggf. näherungsweise) an. Wie lautet das 1000-te Folgenglied?

Rekursionsvorschrift: Der Wert a_{n+1} wird in Abhängigkeit von a_n und n ausgedrückt. Zusätzlich wird a_1 angegeben (vgl. Induktionsprinizip).

Beispiel: Die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + n$ erzeugt die Folge

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \ldots \; .$$

Das Glied $a_{42} = 903$ über diese Vorschrift zu berechnen ist mühsam.
(Später werden wir sehen, wie dies explizit besser geht).

Man gebe die ersten 7 Glieder der durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

gegebenen Folge an. Können Sie eine explizite Bildungsvorschrift finden?

Gelegentlich greift man in Rekursionsformeln auch auf mehrere vorausgehende Glieder zurück. Drückt man dabei a_{n+m} über $a_n, \dots, a_{n+m-1}$ aus, muss man auch m Startwerte angeben.

Beispiel: Die Rekursionsvorschrift für die Fibonacci-Zahlen

$$a_1 = 1,\, a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 1,$$

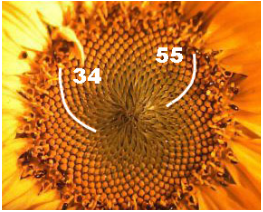
erzeugt die Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \ .$$

Diese Folge wurde von Leonardo da Pisa (Fibonacci), ca. 1180–1241, bei der mathematischen Modellierung einer Kaninchenpopulation entdeckt. Fibonacci gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Fibonacci-Zahlen finden sich häufig an Pflanzenteilen wieder. Grund ist die damit erreichbare hohe Lichtausbeute:

- Die Anzahl von Blütenblättern ist oft eine Fibonacci-Zahl (Ringelblume 13, Aster 21, Sonnenblume, Gänseblümchen 21/34/55/89)
- Die Anzahl gewisser Spiralen in Blütenkörbchen (Sonnenblumen- kerne) oder bei Zapfen (Kiefer) ist häufig eine Fibonacci-Zahl



Bilder alle aus Wikimedia Commons, links: André Karwath aka Aka, Mitte: KENPEI, rechts: Dr. Helmut Haß, Koblenz / Wolfgang Beyer

Anmerkung: Die Umwandlung von expliziter in rekursive Vorschrift und zurück kann schwierig sein. Es gibt Folgen, bei denen nur eine Form oder sogar gar kein Bildungsgesetz bekannt ist.

Beispiel: Die (aufsteigende) Aufzählung aller Primzahlen ergibt die Folge

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$$

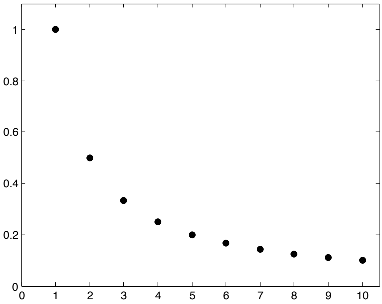
Die Bestimmung etwa des 42-ten Folgenglieds (181) ist hier ohne eine betreffende Liste etwas anstrengend.

Darstellung des Graphen in der Ebene:

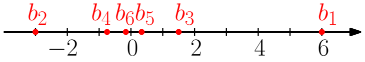
Der Graph einer Zahlenfolge (a_n) ergibt sich durch Abtragen der Folgenglieder a_n gegen die zugehörigen Indices n; er besteht also aus der Punktmenge

$$\{(n, a_n) : \quad n \in \mathbb{N}\}$$

in der Ebene.



Mitunter ist es auch zweckmäßig, lediglich die Folgenglieder auf dem Zahlenstrahl darzustellen:



Definition 3.2

Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $C \geq 0$ gibt, so dass

$$|a_n| \leq C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

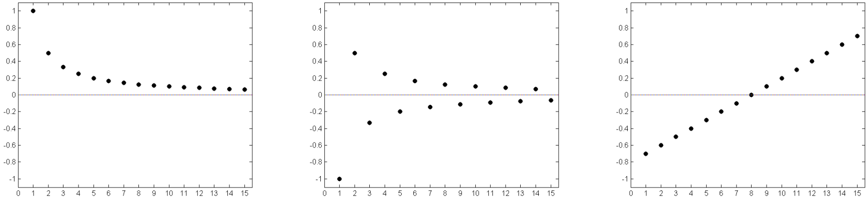
Eine Folge (a_n) heißt

- (streng) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (streng) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (streng) monoton, falls sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Beispiele

- $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist streng monoton fallend und beschränkt ($C = 1$).
- $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ist nicht monoton, aber beschränkt ($C = 1$).
- $\left(-\frac{4}{5} + \frac{1}{10}n\right)$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt.

Die Graphen dieser drei Folgen:



Oft ist es sinnvoll, für monotones Wachstum anstelle von $a_n \leq a_{n+1}$ eine der äquivalenten Ungleichungen

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

zu verwenden (letztere natürlich nur, wenn alle a_n ungleich Null sind!).
Für monoton fallende Folgen analog mit umgekehrtem Relationszeichen.

Untersuchen Sie die Folge $\left(\frac{2^n}{5^{n+2}}\right)$ auf Monotonie und Beschränktheit. Führen Sie die Monotonieuntersuchung mit beiden o. a. Ungleichungen durch.

Definition 3.3 (Arithmetische Folge)

Eine Folge (a_n) heißt arithmetische Folge, falls die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder immer den gleichen Wert ergibt, d.h.

$$a_{n+1} - a_n = d$$

für eine Konstante $d \in \mathbb{R}$.

Satz 3.4

Sei (a_n) eine arithmetische Folge mit $a_{n+1} - a_n = d$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann lautet die explizite Bildungsvorschrift:

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{3.1}$$

Eine arithmetische Folge ist also durch Angabe des ersten Folgenglieds a_1 sowie der Differenz d eindeutig bestimmt.

Mit $a_1 = 3$ und $d = -2$ erhält man die Folge

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \ldots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot (-2) = 5 - 2n.$$

Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift zur arithmetischen Folge

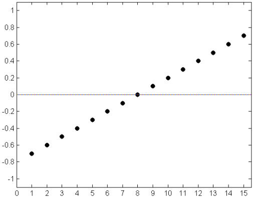
$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots$$

an. Berechnen Sie damit das 2013-te Folgenglied.

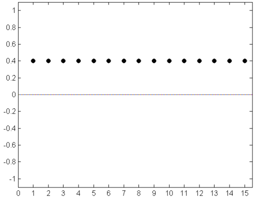
Graphische Darstellung: Nach Satz 3.4 kann man eine arithmetische Folge als Einschränkung der affin linearen Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = a_1 + d(x-1) = a_1 - d + dx$$

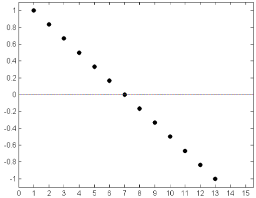
auf die natürlichen Zahlen auffassen. Die Punkte des Graphen liegen somit auf einer Geraden mit Anstieg d:



$a_1 = -\frac{7}{10},\ d = \frac{1}{10}$



$a_1 = \frac{2}{5},\ d = 0$



$a_1 = 1,\ d = -\frac{1}{6}$

Definition 3.5 (Geometrische Folge)

Eine Folge (a_n) heißt geometrische Folge, falls der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder stets denselben Wert ergibt, d.h.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

für eine Konstante $q \in \mathbb{R},\ q \neq 0$.

Satz 3.6

Sei (a_n) eine geometrische Folge mit $a_{n+1}/a_n = q$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann lautet die explizite Bildungsvorschrift:

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{3.2}$$

Eine geometrische Folge ist also durch Angabe des ersten Folgenglieds a_1 sowie des Quotienten q eindeutig bestimmt.

Mit $a_1 = 1$ und $q = \frac{1}{2}$ erhält man die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Wie lautet die explizite Bildungsvorschrift zur geometrischen Folge

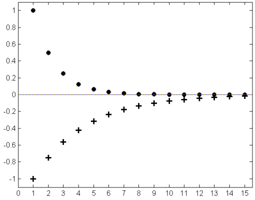
$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \frac{64}{3}, \dots ?$$

Handelt es sich bei $a_n = \frac{4 \cdot 3^{n-4}}{7^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ um eine geometrische Folge?

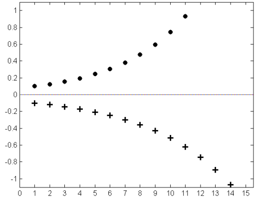
Graphische Darstellung: Nach Satz 3.6 kann man für $q > 0$ eine geometrische Folge als Einschränkung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = a_1 q^{x-1} = \frac{a_1}{q} q^x$$

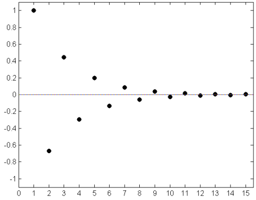
auf die natürlichen Zahlen auffassen. Die Punkte des Graphen liegen für $q > 0$ somit auf dem Graphen einer Exponentialfunktion mit Basis q.



$a_1 = 1,\ q = \frac{1}{2}\ (\cdot)$
$a_1 = -1,\ q = \frac{3}{4}\ (+)$



$a_1 = \frac{1}{10},\ q = 1.25\ (\cdot)$
$a_1 = -\frac{1}{10},\ q = 1.2\ (+)$



$a_1 = 1,\ q = -\frac{2}{3}$

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (lineares Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (exponentielles Wachstum).
Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel $K_n = K_0(1+p)^n$
(K_0 Anfangskapital, p Zinssatz, K_n Kapital nach n Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa 10°C. Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von 3 K pro 100 m ausgehen.

In einer Nährlösung befinden sich 1000 Einzeller, bei denen es durchschnittlich alle 20 min zur Teilung kommt. Schätzen Sie die Zahl der Einzeller nach 24 h bei ungebremstem Wachstum ohne Tod.

Aufgaben auf diesem Frame frei nach Bigalke/Köhler: Mathematik, Band 1, Analysis.

Inhalt

In einigen unserer Beispiele konnten wir feststellen, dass sich die Folgenglieder für große n immer weiter an eine feste Zahl annähern. Mathematisch wird dies mit den Begriffen Konvergenz und Grenzwert beschrieben.

Konvergenz ist ein grundlegender Begriff der Analysis. Der Grenzwertbegriff in seiner modernen Form wurde erstmals durch A.-L. Cauchy formuliert.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857),
französischer Mathematiker,
entwickelte u. a. die durch Leibniz und Newton aufgestellten Grundlagen der Analysis weiter.

Definition 3.7 (Grenzwert)

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Besitzt die Folge (a_n) einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.

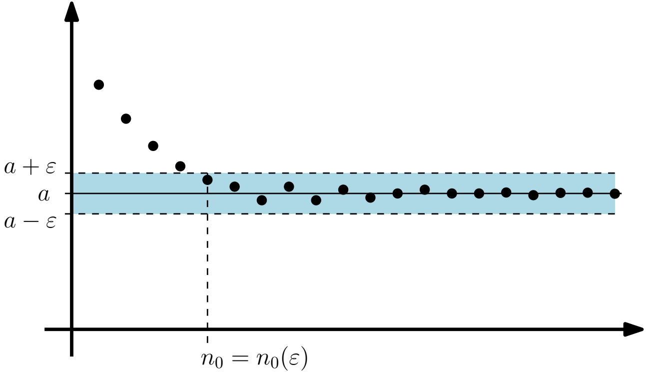
Schreibweisen:

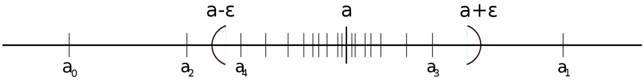
- $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder kürzer: $a_n \to a$.

Zum besseren Verständnis: Denken Sie vor allem an beliebig kleine $\epsilon > 0$.

Grenzwerte und Konvergenz

Graphische und sprachliche Illustration des Begriffs





Für hinreichend großes n liegen die Folgenglieder a_n beliebig nahe am Grenzwert a.

(Bild unten: Wikimedia Commons; Matthias Vogelgesang (Youthenergy))

Beispiele:

- $a_n = c \to c$: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gilt $|a_n - c| = 0 < \epsilon$ für alle n.
- $a_n = \frac{1}{n} \to 0$: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1/\epsilon$, dann gilt:
$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$
- $a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \to 1$: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1/\sqrt{\epsilon}$, dann gilt:
$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2} = \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Satz 3.8

Der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

Definition 3.9 (Nullfolge)

Eine Folge (a_n) heißt Nullfolge, wenn $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Nullfolgen können für eine weitere Charakterisierung von Grenzwerten benutzt werden:

Satz 3.10

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Dabei vereinbaren wir, dass arithmetische Operationen auf Folgen immer gliedweise zu verstehen sind.

Beispiel: $a_n = \frac{n+1}{n} \to 1$, denn $a_n - 1 = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \to 0$.

Eng im Zusammenhang mit konvergenten Folgen steht folgender Begriff:

Definition 3.11 (Cauchy-Folge)

Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0. \tag{3.3}$$

Bei einer Cauchy-Folge liegen also die Glieder für hinreichend große Indizes beliebig eng beisammen.

Der Bezug zur Konvergenz von **reellen** Zahlenfolgen lautet:

Satz 3.12 (Cauchysches Konvergenzkriterium)

*Eine **reelle** Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge (a_n) die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Der Nutzen von Satz 3.12 liegt nicht in der konkreten Berechnung von Grenzwerten, sondern eher in theoretischen Betrachtungen und Entscheidungen über das Konvergenzverhalten einer Folge an sich.

Begründen Sie mit Satz 3.12, dass eine arithmetische Folge mit $d \neq 0$ nicht konvergent sein kann.

Satz 3.13

- *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.13. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Supremum besitzt.

Begründen Sie mit Satz 3.13, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $q > 1$ divergiert.

Wir beginnen mit einigen Vergleichskriterien für Grenzwerte.

Satz 3.14

Gilt $a_n \to a$, $b_n \to b$, *und ist fast immer* $a_n \le b_n$ *(d. h. durchweg ab einem bestimmten Index), so gilt auch* $a \le b$.

Achtung: Aus $a_n < b_n$ folgt dagegen i. a. **nicht** die strenge Beziehung $a < b$. Betrachte zum Beispiel die Folgen $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ und $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

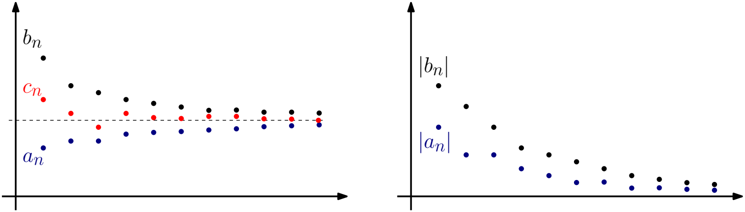
Folgerung 3.15 (Sandwichsatz)

Gilt $a_n \to a$ *und* $b_n \to a$, *und gilt ferner fast immer* $a_n \le c_n \le b_n$, *so gilt auch* $c_n \to a$.

Folgerung 3.16

Ist (b_n) Nullfolge und gilt fast immer $|a_n| \leq |b_n|$, so ist auch (a_n) eine Nullfolge.

Visualisierungen zu Folgerung 3.15 und 3.16:



Für Nullfolgen gilt noch ein weiteres Ergebnis:

Satz 3.17

Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkt, so ist $(a_n b_n)$ wieder eine Nullfolge.

Für die Berechnung von Grenzwerten hilft meist auch folgender Satz:

Satz 3.18 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (a_n) *und* (b_n) *Zahlenfolgen mit* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$*. Dann gilt*

(1) $a_n + b_n \to a + b$,

(2) $a_n - b_n \to a - b$,

(3) $a_n b_n \to ab$,

(4) $\lambda a_n \to \lambda a$ *für jede Konstante* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ist weiterhin $b \neq 0$*, so gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*, so dass* $b_n \neq 0$ $(n \geq n_0)$*. Die Folge* $(b_n)_{n \geq n_0}$ *konvergiert mit*

(5) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Beispiel: Aus $\frac{1}{n} \to 0$ folgt z. B. $2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^3} \to 2 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 2$.

Man beweise Aussage (1) mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

Definition 3.19

Eine Folge (a_n) heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (Schreibweise $a_n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$), wenn zu jeder Zahl $C \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \geq C \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Entsprechend heißt (a_n) bestimmt divergent gegen $-\infty$ (Schreibweise $a_n \to -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), wenn zu jeder Zahl $C \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \leq C \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Beispiele: Es gilt $n + 4 \to +\infty$ und $-n^2 + 3n \to -\infty$ für $n \to \infty$.

Einige Rechenregeln aus Satz 3.18 lassen sich teilweise auf bestimmt divergente Folgen übertragen. Dazu definiert man:

- $c + \infty = \infty + \infty = \infty$ für $c \in \mathbb{R}$,
- $c - \infty = -\infty - \infty = -\infty$ für $c \in \mathbb{R}$,
- $c \cdot \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ für $c > 0$,
- $c \cdot \infty = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$ für $c < 0$,
- $c \cdot (-\infty) = -\infty$ für $c > 0$,
- $c \cdot (-\infty) = \infty$ für $c < 0$,
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$ für $c \in \mathbb{R}$.

Achtung: Ausdrücke wie $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{0}$ sind unbestimmt und können nicht sinnvoll definiert werden.

Man finde Beispiele für Folgen vom Typ „$0 \cdot \infty$“ mit Grenzwert $0, 1, -42$, bestimmter Divergenz in beide Richtungen sowie nicht bestimmter Divergenz.

Wichtige Beispiele

Für $\alpha_k, \beta_l \neq 0$ gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^{l} \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \ldots + \beta_l n^l} \to \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l,\ \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l,\ \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von n ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

Wie lauten die Grenzwerte der Folgen $\left(\frac{n+3}{n^2+4n-1}\right)$, $\left(\frac{n^2+3}{5n^2-4n+1}\right)$ und $\left(\frac{4n^3+1}{-8n+1}\right)$?

Geometrische Folge:

$$q^n \to \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für $q \leq -1$ ist die Folge (q^n) divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

Man führe den Beweis für $0 < q < 1$ mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung (vgl. Mathematik I, Beispiel 2.13, Folie 56) aus.

Für $|q| < 1$ gilt im übrigen sogar

$$n^k q^n \to 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Das polynomielle Wachstum von n^k ist also schwächer als das exponentielle Abklingen von q^n.

Weitere Beispiele von Grenzwerten:

- $n^r \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } r > 0; \\ 0, & \text{falls } r < 0. \end{cases}$
- $\sqrt[n]{c} \to 1$ für jede Zahl $c > 0$,
- $\sqrt[n]{n} \to 1$,
- $(1 + \frac{1}{n})^n \to \mathrm{e} = 2.71828\ldots$
- $(1 + \frac{x}{n})^n \to \mathrm{e}^x$.

Inhalt

Unendliche Reihen

Addieren wir von einer gegebenen Zahlenfolge (a_k) die jeweils ersten Glieder, so entstehen Partialsummen (oder Teilsummen):

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diese Partialsummen bilden eine neue Folge (s_n) und führen uns zum Begriff der (unendlichen) Reihe.

Definition 3.20 (Reihe)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Dann heißt $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ die n-te Partialsumme von (a_k).

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird Reihe mit den Gliedern a_k genannt. Man verwendet für sie die Schreibweise $\sum_{k=1}^\infty a_k$.

Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ heißt konvergent, wenn die zugehörige Partialsummenfolge konvergiert, andernfalls divergent.

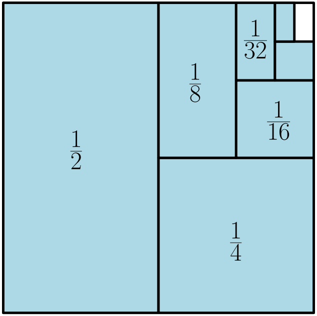
Gilt $s_n \to s$ für $n \to \infty$, so schreibt man

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = s$$

und bezeichnet s auch als Wert oder Summe der Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$.

Anmerkung: Wie bei Folgen ist man bei den Indizes auch hier nicht auf den Startwert 1 festgelegt.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ konvergiert gegen 1, wie folgende geometrische Betrachtung deutlich macht:



Man schreibt also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der geometrischen Reihe, die uns später noch beschäftigen wird.

Die Partialsummen zur Folge (a_k) mit $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ sind gegeben durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Damit gilt $s_n \to 1$ für $n \to \infty$; wir schreiben also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beweisen Sie die Formel für die Partialsummen mittels vollständiger Induktion (Hausaufgabe).

Die zur Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \tag{3.4}$$

gehörige Partialsummenfolge ist $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ und die Reihe damit divergent.

Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, dass Reihen nicht einfach als „unendliche Summen“ aufgefasst werden können:

Paarweises Zusammenfassen benachbarter Glieder $(1 - 1 = 0)$ in (3.4) könnte zum Beispiel zu völlig falschen Schlüssen führen!

Seit Ihrer frühen Schulzeit verwenden Sie für reelle Zahlen auch die Dezimaldarstellung. Betrachtet man zum Beispiel die Zahl π, so gilt:

$$\pi = 3,141529265\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \ldots$$

Allgemein lässt sich die Zifferndarstellung einer Dezimalzahl mit einer Vorkommastelle und Ziffernfolge (z_k) $(z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\})$ als folgende Reihe auffassen:

$$z_1, z_2 z_3 z_4 z_5 \ldots = \frac{z_1}{10^0} + \frac{z_2}{10^1} + \frac{z_3}{10^2} + \frac{z_4}{10^3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^{k-1}}.$$

Die Basis 10 ist übrigens willkürlich gewählt (Anzahl der Finger).

Computer verwenden intern zumeist die Basis 2 (Dualzahlen), im antiken Babylon verwendete man 60; bei den Ureinwohnern Südamerikas waren $4, 8$ und 16 als Basis gebräuchlich (Rechnen ohne Daumen?).

Unendliche Reihen

Partialsummen arithmetischer Folgen

Erinnerung: Eine arithmetische Folge ist gekennzeichnet durch immer gleiche Differenz ihrer Folgenglieder.

Satz 3.21

Sei (a_k) eine arithmetische Folge mit $a_{k+1} - a_k = d$ (also mit $a_k = a_1 + (k-1)d$, vgl. Satz 3.4). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n\left(a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d\right). \tag{3.5}$$

Die zugehörige Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist daher immer divergent – mit Ausnahme des Falles $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ (d.h. $a_1 = 0$ und $d = 0$).

Bei arithmetischen Folgen sind also nur die Partialsummen, aber nicht deren Grenzwerte interessant.

Einen Spezialfall von (3.5) bildet die Formel („Kleiner Gauß“):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Sie war bereits den Babyloniern bekannt und wurde vom 9-jährigen C.F. Gauß bei der Schulaufgabe, die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, wiederentdeckt.

Schema:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & 97 & \dots & 2 & 1 \\ \hline 101 & 101 & 101 & 101 & \dots & 101 & 101 \end{array} \Rightarrow \sum_{i=1}^{100} i = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050.$$

Carl Friedrich Gauß (deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker, 1777-1855).

Einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, mit grundlegenden Beiträgen zur Zahlentheorie, elliptischen Funktionen, nicht-Euklidischer Geometrie und Statistik. U. a. ermöglichte die von ihm entwickelte Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate) die Wiederentdeckung des Zwergplaneten Ceres (1801).

Die Reihe zur geometrischen Folge ist eine der wichtigsten in der Mathematik überhaupt. Auch hier beginnen wir wieder mit einer Aussage über die Darstellung der Partialsummen:

Satz 3.22

Sei (a_k) eine geometrische Folge mit $a_{k+1}/a_k = q$ (also mit $a_k = a_1 q^{k-1}$, vgl. Satz 3.6). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}, & \text{falls } q \neq 1; \\ n a_1, & \text{falls } q = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Man beweise Satz 3.22 mittels vollständiger Induktion über n.

Mittels Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man aus Formel (3.6):

Satz 3.23 (Geometrische Reihe)

Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ heißt geometrische Reihe. Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$, in diesem Falle gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q}. \tag{3.7}$$

Für $|q| \geq 1$ ist die Reihe divergent.

Man berechne die Summen der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{7^{k-1}}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Bemerkung: In Tafelwerken finden Sie auch häufig die Formeln

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = a_1 \frac{q}{1-q} \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} a_0 q^\ell = a_0 \frac{1}{1-q}.$$

Diese erhält man aus (3.7) durch Multiplikation von a_1 mit q bzw. durch **Indexverschiebung** $\ell = k - 1$.

Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ mit $\alpha > 0$ wird harmonische Reihe genannt.

Es gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ist konvergent für alle $\alpha > 1$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ (d.h. die Reihe divergiert) für alle $\alpha \leq 1$.

Insbesondere sind also die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent, während $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Die Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfolgt dabei extrem langsam; hier einige Zahlenwerte zur Illustration:

n	1	2	5	10	100	10^4	10^8
s_n	1	1.5	2.2833	2.9290	5.1874	9.7876	18.9979

Die Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ zeigt man[1] durch Abschätzung der Partialsummen für $n = 2^m$:

$$
\begin{aligned}
s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ mal}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ mal}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ mal}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} m \;\to \infty \quad \text{für } m \to \infty.
\end{aligned}
$$

Die Partialsummenfolge enthält also eine divergente Teilfolge und ist damit selbst divergent.

[1] Dieser Beweisansatz findet sich übrigens bereits in mittelalterlicher Literatur (Nicole Oresme, Frankreich, $\approx$ 1350).

Wendet man die Grenzwertsätze (Satz 3.18) auf Partialsummenfolgen an, erhält man:

Satz 3.24

Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ beide konvergent, so gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\
\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\
\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{für } \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k}\right)$

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, dass Aussagen analog zu Satz 3.24 für $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot b_k)$ **nicht** gelten können.

Definition 3.25 (Absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Absolut konvergente Reihen sind besonders komfortabel – zum Beispiel darf man **nur** bei ihnen die Glieder beliebig umordnen, ohne den Grenzwert zu verändern.

Der folgende Satz liefert den Bezug zur „gewöhnlichen“ Konvergenz:

Satz 3.26

Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist erst recht konvergent. Für sie gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Beispiele: (Nachweis später)

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

  Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ ist absolut konvergent. Es gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \leq \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Mitunter stellt man lediglich die Frage nach der Konvergenz einer Reihe, ohne deren konkreten Grenzwert berechnen zu wollen. Hierbei sind eine Reihe von Konvergenzkriterien hilfreich.

Einen ersten Satz erhalten wir aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge zu einer konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Es gilt

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon \quad \text{für großes } n$$

und daher

Satz 3.27 (Notwendiges Konvergenzkriterium)

Bei einer konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bilden die Glieder eine Nullfolge, d. h. $a_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Kann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$ konvergieren? Gilt die Umkehrung von Satz 3.27? Wenn nicht, finden Sie Gegenbeispiele.

Für alternierende Reihen (d. h. mit wechselndem Vorzeichen der Glieder) ist das folgende Kriterium häufig hilfreich:

Satz 3.28 (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert, wenn (a_k) eine ***monotone*** *Nullfolge ist.*

Was lässt sich über die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3}$$

sagen? Konvergieren diese Reihen auch absolut?

Nach Satz 3.13 ist eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern genau dann konvergent, wenn ihre Partialsummenfolge beschränkt ist. Daraus folgen:

Satz 3.29 (Majorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und gilt fast immer $|a_k| \leq b_k$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, und zwar sogar absolut.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ wird dabei Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genannt.

Beispiel:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ konvergiert, denn $\frac{1}{k^2+k} \leq \frac{1}{k^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Satz 3.30 (Minorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und gilt fast immer $a_k \geq b_k$, dann ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ wird dabei Minorante von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genannt.

Beispiel:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$ divergiert, denn $\frac{1}{k+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergiert (harmonische Reihe).

Geometrische Reihen als Majoranten bzw. Minoranten führen auf zwei Kriterien, die häufig bei Reihengliedern mit Quotienten- oder Potenzstruktur greifen:

Satz 3.31 (Wurzelkriterium)

Gilt mit einer festen positiven Zahl $q < 1$ *fast immer*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le q,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*, und zwar sogar absolut.*
Gilt jedoch fast immer

$$\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Achtung: Es genügt **nicht**, lediglich $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ nachzuweisen, um auf Konvergenz zu schließen! Dies allein kann für konvergente wie divergente Reihen gelten.

Beispiele: $\sum \frac{1}{n}$ und $\sum \frac{1}{n^2}$.

Satz 3.32 (Quotientenkriterium)

Gilt mit einer festen positiven Zahl $q < 1$ fast immer

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, und zwar sogar absolut. Gilt jedoch fast immer

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Dabei ist natürlich vorauszusetzen, dass fast immer $a_k \neq 0$ ist.

Achtung: Auch hier liefert lediglich $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ keine Konvergenzaussage.

Beispiele: $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ und $\sum \frac{k+1}{k}$.

Folgende Version von Quotienten- und Wurzelkriterium ist besonders handlich und wird in der Praxis am häufigsten verwendet:

Folgerung 3.33 (Quotienten- und Wurzelfolge)

Konvergiert die Quotientenfolge $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$ *oder die Wurzelfolge* $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)$ *gegen einen Grenzwert* α*, so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- *(absolut) konvergent, wenn* $\alpha < 1$*,*
- *divergent, wenn* $\alpha > 1$*.*

Bemerkung: Im Falle $\alpha = 1$ liefern die Kriterien kein Ergebnis. Eine nähere Untersuchung wird notwendig.

Warum ist Folgerung 3.33 eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 3.32 und 3.31?

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergiert, denn $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})^2 \to \frac{1}{2}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^k}$ konvergiert, denn $\sqrt[k]{\left|\frac{k}{k^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{k}}{k} \to 0$ (da $\sqrt[k]{k} \to 1$).
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert, denn $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0$.

  Dabei ist $k!$ („k-Fakultät“) für $k \in \mathbb{N}$ definiert durch $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, bzw. $0! := 1$.
- Es konvergiert sogar $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$, denn

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}}{x^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!}\right| = \frac{|x|}{k+1} \to 0.$$

  Wir werden diese Reihe später nutzen, um damit die Exponentialfunktion zu definieren: $\mathrm{e}^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

In den Anwendungen tauchen Reihen häufig in der Gestalt von Potenz- und Fourierreihen auf (mehr dazu später).

Desweiteren werden wir im Kapitel Differentialrechnung den Satz von Taylor kennenlernen, welcher mit solchen Reihenentwicklungen im Zusammenhang steht.

Diese Sätze begründen u. a. folgende häufig verwendeten Näherungen für betragsmäßig kleine $x \in \mathbb{R}$:

- $\sin x \approx \tan x \approx x$,
- $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$,
- $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$, $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

Zum Beispiel führt die erstgenannte Näherung auf die typischen Sinusschwingungen beim Fadenpendel. Die Näherungen in der letzten Zeile beruhen auf geometrischen Reihen.

Exkurs: Achilles und die Schildkröte

…ist ein bekannter Trugschluss (Paradoxon) des griechischen Philosophen Zenon von Elea (ca. 490–430 v. Chr.).

Es wird behauptet, dass der Läufer Achilles niemals eine Schildkröte einholen kann, wenn sie einmal einen gewissen Vorsprung hat.

Folgende Argumentation:

- Wenn Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, hat diese einen neuen (kleineren) Vorsprung gewonnen,
- Wenn Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter vorn usw.

Was Zenon damit zeigen wollte, ist auch aufgrund der Quellenlage unklar. Fakt ist, dass die Vorstellungen von Grenzwert und Unendlichkeit in der Antike noch nicht gut ausgeprägt waren.

Lösen Sie das Paradoxon mit Ihrem neu erworbenen Wissen über Reihen auf.

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- wissen, was man unter Folgen und Reihen versteht,
- die Grenzwertdefinition tiefgehend verstanden haben und beherrschen (auswendig!),
- Grenzwerte von Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze sicher berechnen können,
- an einfachen Beispielen Vergleichskriterien anwenden können (gilt für Folgen und Reihen),
- über die Konvergenzeigenschaften von geometrischer und harmonischer Reihe bescheidwissen,
- anhand von Konvergenzkriterien das Konvergenzverhalten von Reihen analysieren können (mit besonderem Schwerpunkt auf den Sätzen 3.27 und 3.28 sowie Folgerung 3.33).

Sie sind sich nicht sicher oder meinen „nein“? Werden Sie aktiv!